

Tenha sempre a resposta certa –
$x^2 + \sqrt{y}$ = álgebra de maneira fácil e divertida!

Álgebra I

PARA LEIGOS®

FOR DUMMIES®

Mary Jane Sterling

Tornando tudo mais fácil!



Álgebra I Para Leigos®

Folha de cola

Símbolos de relação

= igual

≠ diferente

≅ aproximadamente

< menor que

≤ menor ou igual a

> maior que

≥ maior ou igual a

Regras dos Expoentes

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

$x^a \div x^b = x^{a-b}$

$x^0 = 1$

$x^{-1} = 1/x$

$(x^a)^b = x^{ab}$

$\sqrt[b]{x^a} = x^{a/b}$

Ordem das operações

1. Potência ou Raiz
2. Multiplicação ou Divisão
3. Adição ou Subtração

Regras especiais de fatoração

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

$x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$

Fórmulas Gráficas

Ponto Central $M = \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}$

Distância $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Coeficiente da reta $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Fórmulas Especiais

Fórmula Quadrática ou Fórmula de Bháskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Teorema de Pitágoras $a^2+b^2=c^2$

OS 100 primeiros números primos

2	11	53	101	151	211	251	307	353	401	457	503
3	13	59	103	157	223	257	311	359	409	461	509
5	17	61	107	163	227	263	313	367	419	463	521
7	19	67	109	167	229	269	317	373	421	467	523
	23	71	113	173	233	271	331	379	431	479	541
	29	73	127	179	239	277	337	383	433	487	
	31	79	131	181	241	281	347	389	439	491	
	37	83	137	191		283	349	397	443	499	
	41	89	139	193		293			449		
	43	97	149	197							
	47			199							

Para Leigos®: coleção de sucesso para iniciantes

Álgebra I Para Leigos®

Folha de cola

Os 20 primeiros quadrados perfeitos	
$1^2=1$	$11^2=121$
$2^2=4$	$12^2=144$
$3^2=9$	$13^2=169$
$4^2=16$	$14^2=196$
$5^2=25$	$15^2=225$
$6^2=36$	$16^2=256$
$7^2=49$	$17^2=289$
$8^2=64$	$18^2=324$
$9^2=81$	$19^2=361$
$10^2=100$	$20^2=400$

Os 10 primeiros cubos perfeitos
$1^3=1$
$2^3=8$
$3^3=27$
$4^3=64$
$5^3=125$
$6^3=216$
$7^3=343$
$8^3=512$
$9^3=729$
$10^3=1,000$

Fórmulas do dia a dia

Fórmula	*Tradução*
$A = \pi r^2$	A área do círculo é igual a π vezes o raio ao quadrado.
$C = \pi d$	A circunferência do círculo é igual a π vezes o diâmetro..
$A = bh$	A área do retângulo é igual a base vezes altura.
$D = vt$	A distância é igual a velocidade vezes o tempo.
$I = pjt$	Juro simples é igual ao principal vezes o juros vezes o tempo
$M = P(1+j)^t$	O montante resultante de juros compostos é igual ao principal multiplicado pela soma de 1 mais a taxa de juros, tudo elevado ao tempo (na mesma base de referência dos juros).
$F = (9/5)C + 32$	A temperatura em Fahrenheit é igual a 9/5 vezes o grau Celsius mais 32.
$P = R - C$	Lucro é igual a receita menos custo.
$R = xp$	A receita é igual ao número de itens, x, multiplicado pelo preço de cada item.
$S = dp$	Desconto é igual a taxa de desconto vezes o preço.
$C = p + tp$	O custo total é o preço mais o imposto em percentagem vezes o preço.

Para Leigos®: coleção de sucesso para iniciantes



Tornando tudo mais fácil!

Coleção de sucesso

Você acha que os tradicionais livros de consulta estão cheios de detalhes técnicos e recomendações que você nunca vai usar? Você adia decisões importantes na sua vida porque você simplesmente não quer lidar com elas? Então a nossa coleção de livros de negócios e consulta em geral Para Leigos foi feita para você.

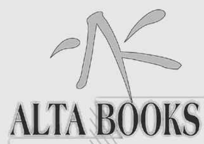
A coleção Para Leigos é escrita para as almas frustradas e trabalhadoras que sabem que não são tolos, mas acham que um grande número de assuntos pessoais e empresariais, da mesma forma que algumas histórias de terror, podem causar uma sensação de desamparo. A coleção Para Leigos usa uma abordagem alegre, prática, e até desenhos e ícones humorísticos para combater o medo e criar confiança. Alegre mas não superficial, estes livros são perfeitos guias de sobrevivência para resolver os seus problemas diários, tanto pessoais quanto de negócios.

"Mais que um fenômeno de publicação, 'Para Leigos' é um marco no tempo."
— The New York Times

"...você não vai se arrepender de comprar essa coleção."
— Walter Mossberg, Jornal de Wall Street, sobre os livros Para Leigos

"Um mundo de informação detalhada e confiável se encontra neles..."
— U.S. News and World Report

Milhões de leitores também concordam. Eles fizeram com que a coleção de computação Para Leigos se tornasse a #1 e que a coleção para negócios se tornasse um sucesso dentre publicações do mesmo tipo, de caráter introdutório. E nossos leitores já escreveram pedindo mais livros! Então, se você está procurando a maneira mais fácil de aprender sobre negócios ou outro tópico para consulta, escolha a coleção Para Leigos para te dar uma mãozinha.



Algebra I

PARA

LEIGOS®

Algebra I para Leigos®

Mary Jane Sterling



ALTA BOOKS
EDITORA
Rio de Janeiro, 2011

Algebra I Para Leigos

Produção Editorial: Editora Alta Books
Coordenação Editorial: Fernanda Silveira
Tradução: Marcia Albuquerque
Revisão: Ana Paula Martins
Revisão técnica: Thomas Suzuki
Diagramação: Pedro Gama

Impresso no Brasil

1ª Reimpressão, 2011



ALTA BOOKS
E D I T O R A

Rua Viúva Claudio, 291 - Jacaré
Rio de Janeiro - RJ CEP 20970-031
Tel: 21 3278-8069 Fax: 21 3277-1253
www.altabooks.com.br
altabooks@altabooks.com.br

Sobre o autor

Mary Jane Sterling, *é educadora desde que se formou na faculdade. Através da atividade de professora em escolas e faculdades, ela teve todo tipo de experiência e oportunidades na área de educação. Há vinte anos ela ensina na Universidade de Bradley em Peoria, Illinois.*

Dedicatória

A autora gostaria de dedicar este a livro a seu marido, Ted e aos seus três filhos, Jon, Jim e Jane, pela demonstração de amor e apoio. Ela também dedica o livro as professoras Catherine Kay e Alba Biagini, que são responsáveis pelo caminho profissional que ela seguiu. E, finalmente, o livro é dedicado ao seu sobrinho Timothy, pela demonstração de coragem e fé.

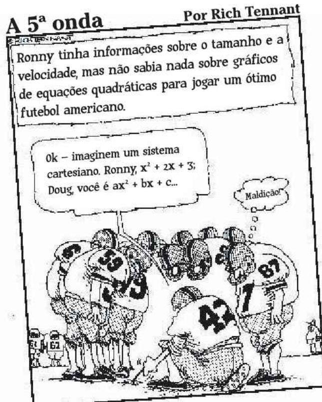
Agradecimentos da Autora

A autora gostaria de agradecer as muitas pessoas que tornaram esse livro possível: Mike Kantor, pela sua eficiente revisão técnica e aos muitos colegas da Editora Wiley: Roxane Cerda por ter iniciado tudo, Susan Decker por ter lançado o projeto, e especialmente a Kathleen Dobie e Esmeralda St. Clair pelo grande esforço, e a Herculean Edições que finalizou o projeto.

O conteúdo à primeira vista

Cartoons à primeira vista

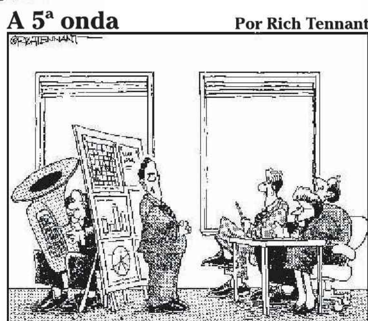
Por Rich Tennant



página 153



página 7

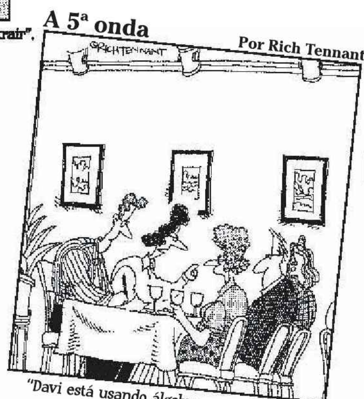


"Preparem-se, eu acho que eles estão começando a se distrair".

página 321



página 87



"Davi está usando álgebra para calcular a gorjeta. Bárbara – você se importaria de ser um expoente fracionário?".

página 241

Informação sobre o cartoon
Fax: 978-546-7747
E-Mail: richtennant@the5thwave.com
Site: www.the5thwave.com

Sumário

Parte IV: Aplicando a álgebra..241

Introdução

Fale a verdade, quando você acordou esta manhã esperava estar lendo a introdução deste livro de álgebra? Era esse o primeiro item na sua lista de coisas a fazer? Eu fico contente que você esteja lendo, mas... por quê?

Você provavelmente está em uma destas duas situações:

- Você se arriscou e comprou o livro ou;
- Você está checando o livro antes de decidir comprá-lo.

Em ambos os casos, você provavelmente gostaria de ter razões boas e concretas para se dar ao trabalho de ler e descobrir a álgebra.

Uma das perguntas mais comuns numa aula de matemática é, "Onde é que eu vou usar isso?". Alguns professores podem dar respostas bem convincentes. Outros hesitam e olham para o chão na hora de falar. Mas minha resposta favorita é "Álgebra te dá *poder*". A álgebra te dá o *poder* de passar para assuntos maiores e melhores em matemática, de saber algo que seu vizinho não sabe e de ajudar alguém com alguma tarefa de álgebra ou de explicar os problemas matemáticos lógicos ao seu filho. Álgebra é um sistema de símbolos e regras universalmente entendido, não importa a língua que se fale. A álgebra apresenta um processo claro e sistemático que pode ser acompanhado do começo ao fim. É uma ferramenta muito útil quando usada com suas devidas regras. Que *poder*!

Este livro não é como um livro de mistério: você não precisa ler do começo ao fim. Aliás, você pode dar uma olhada no final sem estragar o resto da história. Este livro é dividido em assuntos gerais – desde os primeiros elementos básicos à importante ferramenta de fatoração até as equações e aplicações. Eu tentei usar muitos exemplos, um diferente do outro, e cada um mostrando uma *característica* do assunto. Os exemplos vêm com explicações para ajudar no processo de entendimento.

O vocabulário que eu uso é matematicamente correto e compreensível. Junto com os *comos*, eu espero que você descubra os por quês. Às vezes é mais fácil lembrar uma operação quando você entende porque ela funciona e não quando simplesmente tenta memorizar uma lista de passos que parecem não fazer nenhum sentido.

Sobre este livro

Se você está procurando ajuda para lidar com as ferramentas básicas da álgebra, você pode achar esse tipo de informação na primeira parte do livro. Pense nestas ferramentas como se fossem parecidas com as que um cozinheiro precisa. Você não pode cozinhar um suflê, a menos que você saiba como mexer os ovos e ligar o forno. O seu sucesso vai depender da sua preparação. É claro que você pode estar num nível maior do que o básico. Isso seria ótimo! Mas bem... e a segunda parte?

Na segunda parte passo muito tempo explicando sobre fatoração. Na verdade, fatorar nada mais é do que mudar a forma com a qual uma expressão se parece. E a forma fatorada é aquela onde tudo é multiplicado junto. Você pode encontrar as técnicas de fatoração que precisa relembrar caso fique empacado em um problema.

Você deve estar se perguntando onde estariam as equações. Na Parte III eu te mostrarei vários tipos de equações, da mais simples até a mais complexa. Neste capítulo, ainda mais regras e métodos serão adicionados à medida que as equações ficam mais difíceis. Além disso, também apresento algumas inequações.

A Parte IV apresenta as respostas para a pergunta, "Para que esse material de álgebra pode ser usado?" Nestes capítulos, as aplicações são mais voltadas para as questões da prática – discutir coisas que você possa de fato experimentar com a álgebra.

A parte dos "dez" serve como um conjunto de listas de planos de jogo. Você pode precisar de apenas uma única coisa na lista ou você pode examiná-la em ordem. Use-as como desejar.

Divirta-se com isso. Pense neste livro como sendo um link de ajuda em um computador. Se você tiver um problema, pode achar a resposta (e por sorte, com explicações melhores do que as "ajudas" que o computador oferece).

Seguindo os costumes

Você encontra duas maneiras de expressar os números ou numerais. Nas descrições os números menores de dez e os sinais matemáticos (sinal de soma, igual e assim por diante) são escritos por extenso. E nos problemas, eu uso os algarismos e os símbolos. Isto pode tornar a leitura mais fácil.

Os termos especiais para a álgebra estão impressos em itálico e são explicados. Para uma fácil consulta, você encontra estes termos no glossário no final do livro.

Eu ofereço, passo a passo, um bocado de instruções para tornar as coisas mais claras. Normalmente preparo os passos gerais e depois coloco alguns problemas para que você aprenda como usar cada passo em situações diferentes.

Observando os ícones

Os desenhos pequenos e bobos na margem do livro estão ali para chamar sua atenção para um texto específico. E os que uso neste livro são:



Estas são as regras básicas da álgebra (ou da matemática em geral), que devem ser observados para que tudo dê certo. Eles não podem ser mudados e nem ignorados.



Geralmente anexados ao texto principal, estes parágrafos mostram fatos que você pode achar interessante, mas que não precisa saber. Estas observações não são importantes, mas tornam a álgebra um pouco menos impessoal e delicada.



Estes parágrafos ajudam a esclarecer um símbolo ou uma operação. Eu talvez trate do assunto em outra sessão do livro ou simplesmente lembre a você alguma regra básica da álgebra. Se você não está na escola há algum tempo, vai descobrir que o nome de alguma operação mudou.



Indica uma definição ou o esclarecimento de algum passo em uma operação, termo técnico ou expressão.



A informação perto deste desenho não é tão importante, mas geralmente ajuda a tornar sua vida mais fácil – pelo menos sua vida em álgebra.



Isto alerta você para algo que possa ser um pouco complicado. Erros surgem freqüentemente ao se trabalhar com uma operação ou assunto que está perto deste desenho. Por isso, através deste desenho, eu peço atenção especial.

O que não ler

Você pode tirar muito proveito deste livro somente lendo o que tem perto dos desenhos. As linhas próximas as Regras de Álgebra reúnem tudo ordenadamente. Quando você quer mais detalhes é que você lê por entre os desenhos.

As caixas cinza retangulares trazem informações históricas – a vida dos matemáticos pode não servir para fazer filmes emocionantes, mas alguns matemáticos fizeram coisas bastante interessantes. Há também algumas das minhas anedotas e histórias favoritas para relaxar. Você pode localizá-las facilmente por causa das caixas cinza.

Suposições tolas

Eu não vou presumir que você seja tão apaixonado por matemática quanto eu – você deve ser *mais* apaixonado por isto do que eu! De qualquer forma, eu creio que você tenha uma missão aqui – aperfeiçoar suas habilidades, aprimorar o seu pensamento ou, simplesmente, se divertir. Eu também penso que você tenha alguma experiência com álgebra. Talvez ela possa ter sido adquirida através de uma total exposição à matéria por um ou mais anos, talvez uma matéria que você teve há algum tempo, ou somente alguns conceitos iniciais.

Se você foi aluno de alguma escola, você provavelmente teve uma matéria de álgebra. Sem dúvidas, se você for parecido comigo, vai conseguir se lembrar, sem grandes problemas, da sua primeira (e talvez única) professora de matemática. Esse, certamente, foi um momento muito importante na sua vida. Eu consigo me lembrar da Senhora McDonald dizendo "Isto é um n". Nessa hora, todo o meu "mundo dos números" foi, de repente, virado de cabeça pra baixo. Provavelmente, você deve estar investigando o mundo da álgebra para tentar se lembrar dessas lições de muito tempo atrás. Por acaso, seu filho ou filha traz exercícios de matemática que você não consegue se lembrar? Não tenha medo. A ajuda está aqui!

Como este livro é organizado

Onde você encontra o que quer de maneira rápida e fácil? Este livro é dividido em sessões que lidam com os conceitos básicos da álgebra, aqueles mais freqüentemente discutidos e estudados.

Parte I: Começando com os conceitos básicos

Os pais da álgebra basearam todas as suas regras na suposição de que, como primeiro fundamento, todo o mundo deveria concordar com algumas regras a serem estabelecidas. Em Línguas, por exemplo, todos nós concordamos que a palavra em inglês para bom significa a mesma coisa onde quer que apareça. O mesmo vale para álgebra. Todos usam as mesmas regras de adição, subtração, multiplicação, divisão, fração, expoentes, e assim sucessivamente. A álgebra não funcionaria se as regras básicas fossem diferentes para as diversas pessoas. Nós não seríamos capazes de nos comunicar. Os conceitos básicos nesta parte servem para ajudar você a se lembrar que coisas são essas que fizeram com que todos concordassem ao longo dos anos.

É aqui que você vai encontrar os conceitos básicos da aritmética, das frações, das potências e dos sinais dos números. Estas são as ferramentas necessárias para poder lidar com o material que vem depois. A revisão dos conceitos básicos passeia pelas técnicas algébricas mais freqüentemente usadas e você pode recorrer a estes capítulos ao trabalhar com as questões dos capítulos posteriores.

Nestes primeiros capítulos eu introduzo o mundo das letras e dos símbolos. Estudar o uso dos símbolos e dos números é como estudar uma nova língua. E essa língua tem vocabulário, algumas frases freqüentemente usadas, assim como algumas aplicações culturais. Conhecer a linguagem da álgebra é a base para estudos mais detalhados.

Parte II: Entendendo fatoração

Na Parte II temos a fatoração e a simplificação. A álgebra tem poucas operações mais importantes do que a fatoração. Esta é a maneira de reescrever as expressões para tornar a resolução do problema mais fácil. Decompor em fatores significa que as expressões são modificadas da adição e subtração para a multiplicação e divisão. A maneira mais fácil de resolver muitos problemas de matemática é usando a maravilhosa propriedade de multiplicação do zero. Esta propriedade diz que para ter como resposta zero, basta multiplicar por zero. Parece simples e ao mesmo tempo grandioso.

Neste modo de operação há, ainda, a fatoração simples, onde você tem que apenas reconhecer uma semelhança e as fatorações mais complicadas, onde você tem que, além de reconhecer um padrão, saber quais regras usar. Mas não se preocupe porque eu vou te deixar por dentro de todas essas diferenças.

Parte III: Trabalhando com equações

A partir daqui você vai conhecer os pequenos e importantes detalhes sobre como encontrar respostas para equações. Alguns métodos para resolver equações são sofisticados, outros mais provincianos. Eu mostro a você vários tipos de equações e muitos métodos para resolvê-las. Geralmente eu apresento apenas um método para resolver cada tipo de equação, mas quando é necessário que você veja que algumas soluções podem ser melhores que outras, eu posso mostrar mais algumas alternativas também.

Parte IV: Aplicando a álgebra

Nesta parte, você vai compreender sobre a importância de estudar a álgebra. Aqui encontramos fórmulas que estão presentes no nosso dia-a-dia e outras que nem tanto, situações familiares e algumas outras que nos podem parecer totalmente estranhas. Eu não tenho espaço para mostrar todos os tipos de problemas possíveis dentro da álgebra e nas situações cotidianas, mas ofereço aplicação prática, exemplos e conhecimento para preparar você para qualquer situação com a qual se depare.

Parte V: A parte dos "dez"

Aqui eu mostro os dez erros mais comuns em álgebra, as dez maneiras de se fatorar uma equação quadrática, dez das mais usadas regras de divisibilidade e dez passos para resolver um problema algébrico. Estas são listas bem organizadas que você pode usar para consulta rápida. Para detalhes, procure no meio do livro.

Para facilitar as consultas e esclarecimentos de dúvidas, há, também, um glossário de álgebra e termos matemáticos em anexo, no final do livro.

Para onde ir daqui

Se você quer atualizar os seus conhecimentos ou ficar mais confiante, comece com a Parte I. Se você está pronto para fazer exercícios com fatoração e precisa descobrir qual método usar e como usar, vá para a Parte II. A Parte III é para quem está pronto para resolver equações. Lá você pode encontrar qualquer tipo de equação que queira resolver. A Parte IV é onde estão as melhores coisas – as aplicações práticas – coisas a fazer com todas as boas explicações. As listas na Parte V são geralmente o que você olharia por último, depois de visitar todas as outras partes. Mas por que não começar por aqui? Pode ser um lugar bem divertido!

Estudando álgebra você está fazendo exercícios lógicos. À medida que você envelhece, e quanto mais você exercita seus neurônios, mais alerta e informado você fica. "Uso e desuso" significa muito para o cérebro. E o melhor lugar para usar isso é aqui!

O melhor motivo de estudar álgebra é simplesmente porque é lindo. Sim, você leu certo. Álgebra é poesia, significado profundo, uma expressão artística. Apenas observe e você vai descobrir! Também não se esqueça que a álgebra te dá *poder*.

Bem-vindo à álgebra! Divirta-se com essa aventura!

Parte I

Começando com os conceitos básicos

A 5ª onda **Por Rich Tennant**



Nesta parte...

Quantos de vocês podem, agora, se levantar e viajar, num estalar dos dedos, para outro país? Eu acho que não muitos. Isto requer preparação. Você precisa renovar seu passaporte, solicitar um visto, arrumar suas malas, e arranjar alguém para tomar conta dos seus gatos. E para que a sua viagem acabe bem é preciso que haja preparação.

O mesmo é verdade para a álgebra: ela requer que o conhecimento seja aprimorado para que as coisas acabem bem. Uma preparação cuidadosa evita problemas ao longo do caminho. Nesta parte você vai descobrir o essencial para fazer uma viagem com sucesso.

Capítulo 1

Reunindo suas ferramentas

Neste capítulo:

Definindo o conceito básico: números

Reconhecendo os jogadores: variáveis e sinais

Agrupando termos e operações

Jogando o jogo e seguindo as regras

Você provavelmente já deve ter ouvido a palavra álgebra em várias ocasiões e soube, logo de cara, que tinha algo a ver com matemática. Talvez você se lembre que álgebra tem muitas informações, e que por isso exigia que você tivesse duas matérias sobre ela na época da escola – Álgebra I e Álgebra II. Mas o que exatamente é a álgebra? Para que é realmente usada?

Este capítulo responde a estas e outras questões, e apresenta uma visão direta sobre algumas contribuições para o desenvolvimento da álgebra, para esclarecer sobre sua utilidade, sobre como a álgebra é usada e, ainda, sobre quais as ferramentas você precisa para aprendê-la.

Resumindo, você irá descobrir que a álgebra é uma forma de generalizar a aritmética. Através do uso de variáveis que podem geralmente representar qualquer valor em qualquer fórmula dada, fórmulas gerais podem ser aplicadas a todos os números. A álgebra usa números positivos e negativos, números inteiros, frações, operações e símbolos para analisar as relações entre os valores. Usa regras específicas e é um estudo sistemático dos números e suas relações.



Por exemplo, a fórmula a x 0 = 0 mostra que qualquer número real, representado aqui por a, multiplicado por zero é sempre igual a zero. (Para mais informações sobre propriedades de multiplicação por zero, ver o Capítulo 14.)

Em álgebra, usando um x para representar o número dois, por exemplo, em $x + x + x = 6$, você pode generalizar usando a fórmula $3x = 6$.

Você deve estar pensando, "Isto é ótimo e tal, mas, por favor, é realmente necessário fazer isso – colocar letras no lugar de números?" Ora, é claro! Os primeiros matemáticos descobriram que através do uso de letras para representar quantidades os problemas poderiam ser simplificados. E pra dizer a verdade, álgebra é exatamente isso – simplificar problemas.

O objetivo básico da álgebra tem sido o mesmo por milhares de anos: permitir que as pessoas resolvam problemas com respostas desconhecidas.



Álgebra Aha

Datando de mais ou menos 2000 a.C. – no tempo dos babilônios – a álgebra parece ter se desenvolvido de maneira ligeiramente diferente em culturas distintas. Enquanto os babilônios estavam resolvendo equações quadráticas de três termos, os Egípcios estavam resolvendo equações lineares. Os Hindus, por sua vez, tiveram avanços maiores em meados do século seis d.C. No século sete, Brahmagupta da Índia apresentou soluções gerais para as equações quadráticas, além de ter percepções interessantes sobre o zero. Já os Hindus consideravam os números irracionais como números de verdade – embora naquela época ninguém acreditasse em tal ponto de vista.

A tecnologia sofisticada de comunicação existente no mundo de hoje não estava disponível naquele tempo, mas, mesmo assim, as primeiras civilizações conseguiram trocar informações através dos séculos. Em 825 d.C., al-Kzowarizmi de Bagdá escreveu o primeiro livro de álgebra. No entanto uma das primeiras soluções para um problema de álgebra também pode ser encontrada em um papiro egípcio de aproximadamente 3.500 anos.

Conhecido como Papiro de Rhind, depois que um escocês comprou o papiro de 1 pé de largura, 18 pés de comprimento no Egito em 1858, o artefato passou a ser preservado no Museu Britânico - no entanto, é possível encontrar também um de seus pedaços no Museu do Brooklin. Acadêmicos descobriram que em 1650 a.C., Ahmes, um escriturário egípcio, copiou alguns dos trabalhos matemáticos mais antigos sobre o Papiro de Rhind.

Um dos enunciados do problema diz "Aha é inteiro, e somado ao seu sétimo é igual a 19." O "aha" não é uma exclamação. A palavra "aha" designava a incógnita. Você consegue resolver este antigo problema egípcio? Ele seria traduzido, usando símbolos de álgebra atuais, como: $x + \frac{x}{7} = 19$. A incógnita é representada pelo x e a solução é $x = 16\frac{5}{8}$ Não é difícil, é apenas confuso.

Começando com o conceito básico: números

Onde matemática e álgebra estariam sem os números? Parte da vida diária, os números são o fundamento da álgebra. Os números lhe dão um valor com o qual trabalhar.

Onde a civilização estaria hoje se não fossem os números? Sem os números para descobrir os cúbitos, Noé não poderia ter construído a arca. Sem os números para descobrir as distâncias, os declives, alturas, e direções, as pirâmides não teriam sido construídas. Sem os números para descobrir os pontos de navegação, os vikings não teriam saído da Escandinávia. Sem os números para examinar distâncias no espaço, a humanidade não teria chegado à lua.

Até mesmo as tarefas mais simples e a mais comum das circunstâncias requerem um conhecimento de números. Suponha que você queira calcular a quantidade de gasolina gasta a cada dia para ir de casa para o trabalho e voltar. Você precisa de um número para o total de quilômetros entre sua casa e o trabalho e o outro número para o total de quilômetros que seu carro pode fazer com um litro de combustível.

Aprender sobre os diferentes conjuntos de números é importante, pois a maneira como se parecem e se comportam pode preparar a cena para certas situações ou ajudar a resolver determinados problemas. Às vezes, é conveniente declarar, "eu só vou ver as respostas com números inteiros", uma vez que números inteiros não incluem frações. Isto pode acontecer se você estiver resolvendo um problema que envolve número de carros. Quem vai querer a metade de um carro?

A álgebra usa diferentes conjuntos de números para resolver problemas diversos. Ela pode usar os números inteiros ou outros, como segue abaixo.

Números realmente reais



Número real é exatamente o que o nome implica. Em comparação com números imaginários, os números reais representam valores reais – sem fingir ou fazer de conta. Os números reais, o conjunto de números mais abrangente, incluem a totalidade dos números e podem assumir qualquer forma - frações ou números inteiros, com casas decimais ou sem casas decimais. O conjunto dos números reais inclui decimais que podem chegar a não ter fim. As variações sobre esse tema são infinitas.



Para atingir o objetivo deste livro eu sempre me refiro a números reais.

Contando com os números naturais

Um número natural é um número que vem naturalmente. Quais os números que você usou primeiro? Você se lembra de alguém perguntando, "Quantos anos você tem?" Você orgulhosamente levantou quatro dedinhos e disse: "Quatro!". Os números naturais são também chamados de números contáveis: 1,2,3,4,5,6,7, e por aí vai infinitamente.

Você usa números naturais para contar itens. Às vezes a tarefa é contar quantas pessoas há. A metade de uma pessoa não será considerada (o que seria um pensamento meio estranho). Você usa números naturais para fazer listas.

Completando os números naturais

O conjunto de todos os números naturais não é muito diferente dos números naturais visto acima. Os números naturais são justamente os mesmos do item anterior mais o zero: 0,1,2,3,4,5, até o infinito.

Números naturais são números contáveis e são usados quando quantidades inteiras (sem frações) são pedidas. O zero indica nada, nenhum, vazio, nulo. Problemas algébricos muitas vezes exigem que você arredonde a resposta para o número inteiro mais próximo. Isso faz sentido quando o problema envolve pessoas, carros, animais, casas, ou qualquer coisa que não possa ser divido em pedaços.

Integrando os números inteiros

Números inteiros lhe permitem ampliar um pouco seus horizontes. Os números inteiros possuem todas as qualidades dos números naturais e dos seus opostos, ou inversos aditivos (recorra à seção "Fazendo operações com números opostos" neste capítulo para informação em inversos aditivos). Números inteiros podem ser descritos como sendo números inteiros positivos e negativos: . . . -3,-2,-1,0,1,2,3, ...

Números inteiros são populares em álgebra. Quando você resolve um problema longo, complicado, e tem como resposta um número inteiro, você pode ficar alegre porque sua resposta está provavelmente certa. Afinal de contas, não é uma fração! Isto não significa que as respostas, em álgebra, não possam ser frações ou decimais. O problema é que a maioria dos livros de ensino e de referência tenta ficar com as respostas mais agradáveis para aumentar o nível de conforto e evitar confusão. Este também é o plano neste livro. Afinal de contas, quem quer uma resposta confusa, mesmo que na vida real este seja o caso mais freqüente.

Sendo razoável: números racionais

Números racionais agem racionalmente! O que significa isso? Neste caso, agir racionalmente quer dizer que o decimal equivalente do número racional "se comporta". Os decimais terminam em algum lugar ou têm um padrão repetitivo. É isso que significa "se comportar" nesse caso Alguns números racionais têm decimais que terminam em 2; 3,4; 5,777623; -4,5. Outros números racionais têm decimais que repetem o mesmo padrão, como 3.164164164... = 3.164, ou .666666666... =.6. A barra horizontal em cima do número 164 e do número 6 mostra que estes números se repetem sempre.

Em todos os casos, os números racionais podem ser escritos em forma de frações. Todos têm uma fração equivalente. Então, uma definição de número racional é qualquer número que pode ser escrito em forma de fração.

Restringindo os números irracionais

Número irracional é exatamente o que você pode esperar do nome dele – o oposto do número racional. Um número irracional não pode ser escrito como uma fração e os valores decimais nunca terminam e nunca têm um padrão agradável. Uau! E bota irracional nisso! Por exemplo, pi, com seus decimais intermináveis, é irracional.

Igualando números pares e ímpares

Um número par é todo número que pode ser divido, de maneira exata, por dois. "Dois, quatro, seis, oito. Quem quer biscoito?"



Dígitos, dedos da mão e do pé ao longo da história

Os numerais indo-arábicos, como 1,2,3,4,5,6,7,8,9, se originaram com os hindus e foram criados para acompanhar o sistema decimal. A palavra decimal vem do latim, de uma palavra que significa décimo ou dízima. O sistema indo-arábico é um sistema posicional, ou seja, a ordem em que você escreve os dígitos é importante. O número 35 é diferente do número 53 porque em 35, o 3 representa três dezenas e em 53, o três representa três unidades.

A razão principal pela qual os humanos desenvolveram um sistema decimal ou baseado em dez é porque as pessoas normalmente têm dez dedos na mão e dez dedos no pé. Poderia ter sido um sistema baseado no número vinte ou no número cinco – como os babilônios tiveram.

No entanto, de aproximadamente 1700 a.C. até meados de 500 d.C., a maioria dos estudiosos e pensadores da matemática usou um sistema baseado no número sessenta. O uso do número sessenta como base se deu pelo fato de o número de dias no ano ser aproximadamente 360 dias, e sessenta ser um dos melhores divisores de 360. Vestígios do antigo sistema com base no número sessenta são encontrados em nossos minutos e segundos. Você poderia se imaginar lembrando sessenta dígitos diferentes ao invés de somente dez?

Os símbolos usados nos sistemas mais antigos sempre representavam alguma coisa existente: um deste, dois daqueles, e assim por diante. Por um longo tempo não havia nenhum dígito ou símbolo para representar o zero ou nada. O primeiro símbolo para o zero (algo como um W de cabeça pra baixo) foi introduzido em meados do ano 300 a.C. Antes disso, para indicar que não havia nada, o escritor deixava um espaço vazio, o que não era muito eficiente. Às vezes o escritor esquecia-se de deixar um espaço, e um escritor descuidado às vezes não deixava espaço suficiente. E mais: não havia nenhuma maneira clara de indicar mais de um zero.

Um número ímpar é todo número que não pode ser dividido, de maneira exata, por dois. Os números pares e ímpares se alternam quando você lista todos os números inteiros.

Variando variáveis



Variável é a palavra mais geral para uma letra que representa o desconhecido, ou o que você está calculando em um problema de álgebra. Uma variável sempre representa um número.

Álgebra usa letras, chamadas variáveis, para representar números que correspondem a valores específicos. Normalmente, se você usa letras do começo do alfabeto, como a, b, ou c, elas representam valores conhecidos ou definidos. Já as letras do final do alfabeto, como x, y, ou z, representam as incógnitas, coisas que podem ser mudadas, ou o que você está calculando.

A lista a seguir mostra algumas variáveis mais comumente utilizadas.

- A letra *n* não se encaixa nem no começo e nem no final do alfabeto, mas é freqüentemente usada em álgebra, muitas vezes representando uma quantidade desconhecida ou um número – provavelmente porque a letra *n* é a primeira letra da palavra número.

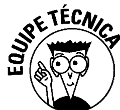


- A letra *x*, por ser uma letra que lembra mistério (X demarca o lugar, é o fator x, Arquivo X), é normalmente a variável que você calcula. Qualquer que seja a razão pela qual o *x* é tão popular como uma variável, a letra também é usada para indicar multiplicação. Você tem que ser claro quando usa a letra *x* para que ela não seja interpretada como uma multiplicação.

- C e k são duas das letras mais populares usadas para representar quantias conhecidas ou constantes. As letras que representam números e variáveis são normalmente minúsculas: *a, b, c,* e assim por diante. Letras maiúsculas são geralmente usadas para representar a resposta em uma fórmula, como o *A* para a área de um círculo que é igual a pi vezes o quadrado do raio, $A=\pi r^2$. (Você pode achar mais informação sobre a área do círculo no Capítulo 17.) A letra *C*, mencionada como sendo uma escolha popular para uma constante, é freqüentemente usada em Cálculo e Física, e maiúscula em ambas as matérias – provavelmente por causa da tradição.

Falando em Álgebra

Álgebra e símbolos em álgebra são como um idioma estrangeiro. Todos significam alguma coisa e podem ser traduzidos de uma língua para outra quando necessário. É importante saber o vocabulário em um idioma estrangeiro; assim como é importante, da mesma forma, em álgebra.



- Uma *expressão* é qualquer combinação de valores e operações que possam ser usadas para mostrar como as coisas se agrupam e como se comparam umas às outras. $2x^2 + 4x$ é um exemplo de uma expressão.

- Um termo – como $4xy$ – é o agrupamento de um ou mais fatores (variáveis e/ou números). Multiplicação é a única coisa que conecta o número com as variáveis. Por outro lado, adição e subtração separam os termos uns dos outros. Por exemplo, a expressão $3xy + 5x - 6$ tem três termos.

- Uma *equação* usa um sinal para mostrar uma relação – que duas coisas são iguais. Usando uma equação, os problemas difíceis podem ser transformados em problemas mais fácies e com respostas mais simples. Um exemplo de uma equação é $2x^2 + 4x = 7$. Veja os capítulos na parte III para mais informação sobre equações.

- Uma *operação* é uma ação realizada com um ou dois números para produzir um número como resultado. As operações são adição, subtração, multiplicação, divisão, raízes quadradas, e assim por diante. Veja o Capítulo 6 para mais informação sobre operações.

- Uma *variável* é uma letra que sempre representa um número, mas varia até que seja escrita em uma equação ou inequação (uma inequação é a comparação de dois valores. Veja mais sobre inequações no Capítulo 16), quando então o destino da variável é definido – pode ser calculada e o seu valor se torna a resposta da equação.

- Uma *constante* é um valor ou número que nunca muda em uma equação – é constantemente o mesmo. Cinco (5) é uma constante porque é o que é. Uma variável pode ser uma constante se a ela for designado um valor definitivo. Geralmente, a variável que representa a constante é uma das primeiras letras do alfabeto. Na equação $ax^2 + bx + c = 0$, a, b e c são constantes e o x é a variável. O valor de x depende do que a, b e c estão representando.

- Um *expoente* é um número pequeno, escrito um pouco acima e à direita da variável ou do número, como, por exemplo, o número 2 na expressão 3^2. O expoente, também conhecido como potência, é usado para mostrar multiplicações com números iguais. Para mais sobre expoentes, ver Capítulo 4.

Focando nas operações algébricas

Hoje em dia, em álgebra, uma variável representa a incógnita (veja mais sobre variáveis na sessão "Falando em Álgebra" deste capítulo). Antes que o uso dos símbolos tivesse êxito, os problemas eram escritos na forma de expressões longas e prolixas. De fato, o uso de sinais e operações foi um grande progresso. Primeiramente, algumas operações foram usadas, e depois a álgebra se tornou totalmente simbólica. Nos dias de hoje, você pode ver algumas palavras ao longo das operações para explicar e ajudar você a entender, como se fosse a legenda de um filme. Veja este exemplo para entender o que quero dizer. Qual das duas formas você preferiria escrever:

> O número de garrafas de água multiplicado por seis e, ao valor, adicionado três.
>
> ou
>
> $6x + 3$?

Eu escolheria a segunda opção. E você?

Deixar uma variável representar um valor, em seguida acrescentar algumas operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) e depois usar algumas regras específicas que foram estabelecidas durante os anos – fazendo conforme os primeiros matemáticos fizeram – você tem um sólido e organizado sistema para simplificar, resolver, comparar ou confirmar uma equação. Álgebra é exatamente isso, e é para isso que serve.

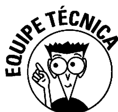


O que tem em uma palavra?

A palavra álgebra é uma variação da palavra de origem árabe aljabr, que significa reunião ou união conjunta das partes. Esta palavra foi modificada mais adiante quando os Mouros trouxeram a palavra algebrista, significando ortopedista (alguém que une ou coloca junto os ossos), para a Espanha, durante a Idade Média. Sinais em cima de barbearias na Espanha dizendo Algebrista y Sangradoe indicavam que a loja oferecia um ortopedista e um flebotomista. Naquele tempo, e durante séculos, barbeiros executavam procedimentos médicos secundários para completar a renda. O tradicional poste do barbeiro, listrado de vermelho e branco, simbolizava sangue e bandagens. Talvez este seja o motivo pelo qual a palavra álgebra, que vem da palavra algebrista, tenha a reputação de ser algumas vezes dolorosa.

Decifrando os símbolos

O conceito básico de álgebra envolve os símbolos. Álgebra usa símbolos para quantidades, operações, relações ou agrupamentos. Os símbolos são abreviados e muito mais eficientes do que escrever as palavras ou significados. Mas você precisa saber o que eles significam. A lista a seguir fornece algumas dessas informações.



- + significa adicionar ou achar a soma, ou mais que, ou aumentado por; o resultado da adição é a soma ou total.
- - significa subtrair ou diminuir, ou diminuído por, ou menos; o resultado da subtração é chamado de diferença.
- × significa multiplicar ou vezes. Os valores que vão ser multiplicados são os multiplicadores ou fatores; o resultado é chamado de produto. Outros símbolos de agrupamentos que podem representar multiplicações são: ( ), [ ], { }, ·, *. Em álgebra, o símbolo × é raramente usado porque pode ser confundido com a variável x. O ponto também é mais popular porque é fácil de escrever. Os sinais de agrupamento são usados quando se precisa conter muitos termos ou expressões confusas. Eles não indicam multiplicação, mas se você puser um valor em frente a um desses símbolos, isto vai indicar uma multiplicação. Para mais informações sobre os sinais de agrupamento pule para seção de "Agrupamento."
- ÷ significa dividir. O número que divide o dividendo é o divisor. O resultado é o quociente. Outros sinais que indicam divisão são a linha de fração e a barra, /.
- √ significa tirar a raiz quadrada de algo – achar o número que multiplicado por ele mesmo te dá o número embaixo do sinal (veja mais sobre raiz quadrada no Capítulo 4).
- | | significa o valor absoluto de um número, que é o próprio número ou sua distância do zero em uma reta numerada (veja mais sobre valor absoluto no Capítulo 2).

- ...significa et Cetera, assim por diante ou no mesmo padrão. Em álgebra você usa reticências quando se tem uma extensa lista de números e não se deseja escrever todos eles. Por exemplo, se você quer listar números começando com o número 1 e sempre aumentando 1 unidade, escreva: "1, 2, 3, 4, ...". Ou você pode escrever a lista dos números a partir de 600 até 1.000 como "600, 601, 602,..., 1000."



- π é a letra grega pi que se refere ao número irracional: 3,14159.... Ela representa a relação entre o diâmetro e a circunferência de um círculo. Para mais informação sobre esta relação ver Capítulo 17.

Agrupamento

Quando um fabricante de carros monta um carro, muitas coisas diferentes devem ser feitas antes. Os especialistas em motor têm que construí-lo com todas as suas partes. A carroceria tem que ser montada no chassi e também precisa ser protegida. Os outros especialistas vão executar as tarefas nas quais são especializados. Quando estas tarefas forem completadas, em ordem, então, o carro pode ser montado. A mesma coisa vale para a álgebra. Você tem que resolver o que está dentro dos sinais de agrupamento antes de usar o resultado no resto da equação.

Os sinais de agrupamento dizem que você deve lidar com os termos de dentro do sinal antes de lidar com o problema como um todo.



Os principais sinais de agrupamento são:

- ( ) Parênteses (Este é o mais usado.)
- [ ] Colchetes
- { } Chaves

Por exemplo, 8 – (4 - 2) diz para fazer primeiro o que está dentro dos parênteses. Isto é diferente de (8 - 4) – 2. A primeira expressão tem como resposta 6, e a segunda 2.

Esses três sinais de agrupamento – os parênteses, colchetes e chaves – são usados sozinhos ou em conjunto. Quando usados juntos, tornam o problema um pouco mais complicado.

Definindo as relações

A álgebra é toda sobre relações – não as do tipo bem-me-quer/mal-me-quer – mas as relações entre números e entre os termos de uma equação. Ainda que relações algébricas possam ser tão complicadas quanto às românticas, você tem uma melhor chance de entendê-las. Os sinais para as relações são mostrados aqui.



O início do sinal de igual

Robert Recorde foi o primeiro a usar o sinal de igual (=) em meados de 1500. Ele escreveu, "Usarei, como faço freqüentemente no trabalho, um par de linhas paralelas, de mesmo comprimento, assim: =, porque duas coisas não podem ser mais iguais." No entanto, nem todos os matemáticos aceitaram de imediato o sinal de igual. Alguns preferiam duas barras paralelas na vertical. Um símbolo lembrando α (com "caudas" maiores) foi também popular por um tempo. O sinal de igual parece ter sido aceito por quase todos na metade do século XVII.



- $=$ significa que o primeiro valor é igual ao valor seguinte.
- $\neq$ significa que o primeiro valor não é igual ao valor seguinte.
- $\approx$ significa que um valor é aproximadamente igual, ou quase igual ao valor seguinte; esse símbolo é usado quando arredondamos números.
- $\leq$ significa que o primeiro valor é menor que ou igual ao valor seguinte.
- $<$ significa que o primeiro valor é menor que o valor seguinte.
- $\geq$ significa que o primeiro valor é maior que ou igual ao valor seguinte.
- $>$ significa que o primeiro valor é maior que o valor seguinte.

Operando com opostos

Ao resolver equações em álgebra, fazer o oposto para chegar a resposta é geralmente a maneira mais usada. Você tem que desfazer as operações que foram feitas com a variável. O oposto de uma operação é outra operação que leva você de volta para onde começou. Isto é usado, antes de qualquer coisa, para se livrar dos números que estão combinados com a variável, permitindo que você a calcule na equação.

Sendo contrário: Fazendo operações opostas

O oposto de adicionar três é subtrair três. Se você adiciona três ao número 100, você tem como resposta 103. Se depois você subtrai três de 103, você está de volta onde começou.

- O oposto da adição é a subtração.
- O oposto da subtração é a adição.
- O oposto da multiplicação é a divisão.
- O oposto da divisão é a multiplicação.

- O oposto de tirar a raiz quadrada é elevar ao quadrado (multiplicar o valor por ele mesmo).
- O oposto de elevar ao quadrado é tirar a raiz quadrada.
- O oposto de elevar a terceira é tirar a raiz cúbica.



Lidando com o oposto dos números

Um número, na verdade, tem dois opostos: o inverso aditivo ou simétrico e o inverso multiplicativo:

- O inverso aditivo é o número com o sinal oposto. Então, -3 é o inverso aditivo de 3, e 16 é o inverso aditivo de -16. Faça isso se o 3 ou o 16 estão sendo somados a variável e você quer que a variável fique sozinha; isto é usado ao se resolver uma equação para solucionar a variável.
- O inverso multiplicativo é também chamado de recíproco, ou simplesmente inverso. O recíproco é o número original escrito na forma de fração. Assim sendo, $\frac{1}{2}$ é o inverso de 2, e 25 é o inverso de $\frac{1}{25}$. Se um número já é uma fração, seu recíproco é a fração escrita de maneira inversa, ou seja, o inverso de $\frac{4}{7}$ é $\frac{7}{4}$. Use isto se o número multiplica ou divide a variável. Desta forma, você faz com que a variável fique sozinha para poder ser solucionada.

Jogando pelas regras

O conceito básico da álgebra também envolve regras / leis, como as que você segue quando está dirigindo. Se todos seguem as mesmas leis, acidentes e caos seriam menos comuns. O mesmo vale para a álgebra. Você tem que observar as regras da álgebra ao trabalhar com variáveis, números, e símbolos. Seguir as regras é importante quando você resolve problemas, uma vez que você não sabe a qual número a variável se refere. Desde que foram desenvolvidas, todos que trabalham com álgebra usam as mesmas regras, e é por isso que a linguagem da álgebra é considerada universal.

A álgebra envolve símbolos, assim como variáveis e sinais de operações. Eles são as ferramentas que você pode usar para fazer com que as expressões algébricas sejam mais práticas e compreensíveis. Estas coisas andam de mãos dadas com simplificação, fatoração e solução de problemas, que são mais fáceis de resolver se divididos em partes básicas. Usar símbolos é realmente muito mais fácil do que vadear por um grupo de palavras.

- *Simplificar* significa combinar tudo que pode ser combinado, diminuir o número de termos e escrever a expressão de uma maneira fácil e compreensível. Para saber mais sobre simplificação, ver o Capítulo 13.
- *Fatorar* significa trocar dois ou mais termos por apenas um. Ver Parte II para mais informação sobre fatoração.
- *Solucionar* significa achar a resposta. Em álgebra, significa descobrir o valor da variável.

Resolver equação é divertido porque faz sentido.Você soluciona algo (normalmente uma variável,como x) e obtém uma resposta que você pode conferir para ver se está certa ou errada.É como um quebra-cabeça.É bastante para algumas pessoas dizerem, "Dê-me um x." O que mais você poderia querer? Mas resolver estas equações é apenas um meio para um fim.A verdadeira beleza da álgebra acontece quando você resolve algum problema na vida real – uma aplicação prática.

Você está pronto para estas palavras: problemas de matemática? Problemas de matemática são o ponto principal de se estudar álgebra. Por que estudar álgebra se não houver uma boa razão? Ah, me desculpem, alguns de vocês devem gostar de resolver equações de álgebra só pela diversão, não é? Sim, existem pessoas assim. Assim como existem pessoas que também adoram ver o modo como um parágrafo complicado e extenso em português pode ser transformado em uma expressão limpa e concisa, como por exemplo, "A resposta é três bananas." Passar por cada etapa e usar cada ferramenta para jogar este jogo é completamente possível. Simplifique, fatore, resolva, confira. Isso é ótimo! Que bom pra você. Está na hora de botar a mão na massa!

Capítulo 2

Atribuindo Sinais: Números Positivos e Negativos

Neste capítulo:

- Reunindo os sinais numéricos
- Trabalhando com sistemas diferentes
- Notando as propriedades do zero
- Fazendo operações algébricas com números positivos e negativos
- Observando a propriedade Associativa e a Comutativa

Os números têm muitas características: eles podem ser grandes, pequenos, pares ou ímpares, inteiros, frações, positivos, negativos e, algumas vezes, frios e indiferentes – bem, na verdade estou brincando sobre esses últimos. O capítulo 1 descreve os diferentes nomes e categorias dos números. E este capítulo aborda apenas as características positivas e negativas dos números.

Positivo(a) e *negativo(a)* são palavras que você usa e ouve todos os dias:

> "Você tem uma influência *positiva* em mim."
>
> "Estou sentindo vibrações *negativas.*"

Este capítulo te ensina como adicionar, subtrair, multiplicar e dividir com números positivos e negativos, sem que se importe se todos os números têm os mesmos sinais ou sinais diferentes.

Mostrando alguns sinais

Desde cedo, matemáticos perceberam que usar os sinais de mais e menos e criar regras para o uso deles seria uma grande vantagem no mundo dos números. Eles também perceberam que se usassem o sinal de menos não

haveria necessidade de criar um bocado de símbolos para os números negativos. Até porque, os números positivos e negativos estão relacionados entre si e o uso do sinal de menos funciona perfeitamente. Números negativos têm equivalentes positivos e vice-versa. Isto significa que -3 e +3 estão relacionados. Um novo símbolo, como, por exemplo, o ΰ, não precisou ser criado para representar o oposto de três – nós simplesmente usamos o sinal de menos. Se você entende o que é ter seis bananas, então você também entende como é *não* ter seis bananas.

Os números com sinais opostos, mas iguais de resto, são inversos aditivos.



Dois números são inversos aditivos se a soma entre eles for zero, $a + (-a) = 0$. Inversos aditivos têm sempre a mesma distância do zero (em sentidos opostos) numa linha numerada. Por exemplo, o inverso aditivo de -6 é +6; o inverso aditivo de $+\frac{1}{5}$ é $-\frac{1}{5}$.

Identificando os números positivos

Números positivos são maiores do que zero. Eles estão do lado oposto dos números negativos. Se você organizar um cabo de guerra entre os números positivos e negativos, os números positivos vão se colocar do lado direito do zero, como mostra a figura 2-1.

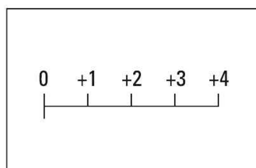


Figura 2-1: Alguns números positivos alinhados.

Os números positivos crescem à medida que se distanciam do zero: 81 é maior do que 25 porque está mais longe do zero; 212oF (ou 100oC), a temperatura de ebulição da água, é mais distante do zero do que 32oF (ou 0oC), a temperatura de congelamento da água. Esses dois números são positivos, mas um aparenta ser mais positivo do que o outro. Procure mais sobre a diferença entre a água congelada e a água em ebulição para ver quão mais positivo um número pode ser!

Tirando o melhor dos números negativos

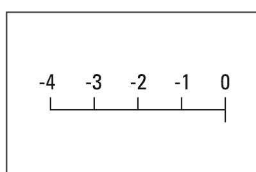
O conceito de um número menor que zero pode ser difícil de entender. É claro que você pode dizer "menor que zero", e até escrever um livro com este título,

mas o que isso realmente significa? Pense sobre entrar no térreo de um enorme edifício do governo.Você se dirige para o elevador e tem que escolher entre subir para o primeiro,segundo,terceiro ou quarto andar,ou descer para o primeiro,segundo,terceiro,quarto ou quinto subsolo (local onde ficam as coisas secretas).

Ou seja,quanto mais longe você estiver do térreo,mais longe estará o número do seu andar em relação ao andar do zero (térreo).O segundo subsolo poderia ser chamado de andar -2,mas talvez não fosse um número legal para um andar.

Números negativos são menores do que zero.Numa linha com o zero no meio os números negativos estariam alinhados a esquerda,como mostra a Figura 2-2.

Figura 2-2: Números negativos alinhados a esquerda.



Os números negativos diminuem à medida que se afastam do zero.Isto pode ser confuso porque você pode pensar -200 é maior do que -12.Mas procure pensar em -200oC e -12oC.Nenhum dos dois é agradável de pensar,mas -200oC é definitivamente menos agradável: ele é mais frio,mais baixo e menor.



Em relação aos números negativos,o número mais perto do zero é o maior.

Comparando números positivos e negativos

Embora minha mãe tenha sempre falado para eu não me comparar com as outras pessoas,comparar números muitas vezes pode ser útil.E quando você compara números,o sinal maior que (>) e o sinal menor que (<) também são muito úteis.É por isso que uso estes sinais na Tabela 2-1,onde coloco alguns números positivos e negativos em perspectiva.

Tabela 2-1 Comparando números positivos e negativos

Comparação	*O que significa*
6 > 2	6 é maior do que 2; 6 está mais distante do zero do que o 2.
10 > 0	10 é maior do que 0; 10 é positivo e maior do que 0.
–5 > –8	-5 é maior do que -8; -5 está mais perto do 0 do que -8.

(continua)

Tabela 2-1 (continuação)

Comparação	*O que significa*
–300 > –400	-300 está mais perto do 0 que -400.
0 > –6	-6 é negativo e menor do que 0.
7 > –80	Números positivos são sempre maiores do que números negativos.

Então, colocando os números 6, -2, -18, 3, 16 e -11 em ordem crescente teremos: -18, -11, -2, 3, 6 e 16, que são mostrados através de pontos na linha numerada na Figura 2-3.

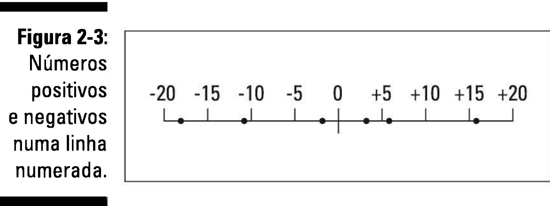


Figura 2-3: Números positivos e negativos numa linha numerada.

Prestando atenção no zero

Eu continuo a comparar os números para ver a distância deles até o zero. Mas e o zero? O zero é positivo ou negativo? A resposta é nenhum nem outro. O zero tem uma característica própria de não ser nem positivo nem negativo. O zero separa os números positivos dos números negativos – que trabalho!



Sinal de mais (+) e de menos (-)

A primeira vez que os sinais de mais (+) e menos (-) apareceram impressos, eles se referiam a superávit e a déficit em situações financeiras – e não em operações aritméticas. Mas mesmo antes destes sinais terem aparecido formalmente impressos, os símbolos de mais e menos eram intensivamente usados. Por exemplo, sinais de mais e menos eram pintados em barris de mercadoria para indicar se estavam cheios ou vazios.



Números Negativos

As civilizações chinesas da antiguidade foram responsáveis por muitas invenções e descobertas importantes. Atribui-se aos chineses a descoberta da pólvora, da impressão, do papel e da bússola. Eles também tinham um bom método para lidar com números negativos – e isso bem antes deste ter sido formalmente reconhecido.

Os chineses usavam dois conjuntos de varetas – um vermelho para os coeficientes positivos e um preto para os coeficientes negativos. Por alguma razão, as cores foram eventualmente trocadas, e agora o vermelho costuma indicar um déficit financeiro ou negativo (como "no vermelho") e o preto significa positivo ou superávit.

Entrando em operações

A operação em álgebra não é nada parecida com as operações realizadas em hospitais. Bom, nos dois casos, você pode até dissecar as coisas, mas fazer isso com números é muito mais fácil do que fazer com as coisas que existem para serem dissecadas em hospitais.

A álgebra é apenas uma maneira de generalizar a aritmética, de modo que as operações e regras usadas em aritmética funcionem do mesmo jeito na álgebra. Algumas operações novas surgiram para tornar as coisas mais interessantes do que simplesmente adicionar, subtrair, multiplicar e dividir. Eu vou introduzir uma dessas operações novas depois de explicar a diferença entre uma operação binária e uma não binária.

Começando com operações binárias

Relaxe, eu não mudei, de uma hora para outra, o foco deste livro para *Astronomia Para Leigos*. O binário nesta sessão se refere às operações com dois números e não aos sistemas com duas estrelas.

Bi significa dois. Uma *bicicleta* tem duas rodas. Um *bígamo* tem duas esposas. Uma operação binária envolve dois números. Adição, subtração, multiplicação e divisão são todas operações binárias porque você precisa de dois números para poder fazê-las. Você pode somar 3+4, mas não pode somar 3+ se não houver nada depois do sinal de mais. Você precisa de outro número.

Introduzindo operações não binárias

Uma operação não binária precisa de apenas um número. Ela efetua a operação e "cospe fora" a resposta. Raízes quadradas são operações não binárias. Você acha a $\sqrt{4}$ fazendo esta operação com apenas um número. Veja o Capítulo 14 para mais informações sobre raízes quadradas.



Fazendo a sua própria operação binária

Tudo o que se precisa para criar uma operação binária, é criar uma regra para sua resolução e quais números poderão ser usados. Por exemplo, você poderia dizer "Eu tenho uma nova operação binária chamada estrela, *. Quando você "estrela" dois números juntamente, você coloca um zero entre eles". Por exemplo, 4*7 = 407. Como você pode ver 4*7 não é o mesmo que 7*4.

Agora, você poderia dizer: "para que serve esta operação?" Bem, do meu ponto de vista, para nada. Talvez isto te dê um pouco mais de apreciação pelas operações binárias que já existem, já que elas nos mostram algo de realmente útil.



Uma das mais importantes operações não binárias caracteriza-se por encontrar o valor absoluto de um número. A operação de valor absoluto vai mostrar a distância do número até o zero. Ela não se preocupa com o fato do número ser maior ou menor que zero, ela apenas determina sua distância.

O símbolo para valor absoluto é representado por duas barras verticais: | |.



O valor absoluto de a, onde a representa qualquer número real, seja ele positivo ou negativo, é:

- $|a| = a$, quando $a \geq 0$
- $|a| = -a$, quando $a < 0$ (negativo), e $-a$ é positivo.

As operações de valor absoluto se parecem com estas a seguir:

- $|3| = 3$
- $|-4| = 4$
- $|-87| = 87$
- $|0| = 0$

Basicamente, a operação de valor absoluto mostra a distância do número até o zero. Não se apega ao fato de o número ser maior ou menor que zero, apenas determina a distância.

Trabalhando com sinais numéricos

Se você está em um elevador de um prédio com quadro andares acima do térreo e cinco andares abaixo, você pode se divertir subindo e descendo o dia todo, apertando botões e trabalhando com sinais numéricos.

Você provavelmente é muito jovem para se lembrar disso, mas algumas pessoas eram pagas para "passear" no elevador e apertar botões o dia todo. Eu gostaria de saber se essas pessoas tiveram que entender álgebra para trabalhar com isso, pois se você quisesse subir cinco andares a partir do terceiro andar do subsolo, você acabaria no segundo andar acima do térreo.

Somando números com sinais iguais

Quando a sua professora da 1ª série te ensinou que um mais um é igual a dois, ela provavelmente não te disse que isso era apenas uma parte da grande história sobre a adição. Ela não mencionou que somando um número positivo com outro número positivo é um caso muito especial. Se ela *tivesse* contado toda essa história – de que você pode somar números positivos e negativos juntamente – você provavelmente teria arrumado sua mochila e seu lanche e teria ido embora na mesma hora.

Somar todos os números positivos é somente um pequeno pedaço de toda a história da adição, mas naquela época aquilo era suficiente para você começar. Esta parte do livro vai te contar a história completa e agora você vai ter acesso a toda informação necessária para fazer operações com números positivos e negativos.

A primeira coisa a ser considerada na adição de números com sinais numéricos é começar pela parte mais fácil: os números com sinais iguais. Veja o que acontece:

- Você tem 3 maçãs e seu amigo te dá 4 maçãs.

  $(+3) + (+4) = +7$

  Agora você tem 7 maçãs.

- Você deve a João R$8,00 e teve que pedir emprestado mais R$2,00.

  $(-8) + (-2) = -10$

  Agora você deve a João R$10,00.



Existe uma ótima regra para este tipo de adição. Veja se você consegue dizer essa frase três vezes seguida: se os sinais são iguais, some-os, o sinal da soma será o mesmo dos sinais.

A regra é válida quando a e b representam dois números reais quaisquer:

$$(+a) + (+b) = +(a + b)$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

Eu gostaria de ter aliterações para cada regra, mas isto é matemática – e não poesia!

Vamos supor que você esteja somando -3 e -2. Os sinais são os mesmos, então você soma 3 e 2, que é 5. O sinal da soma é o mesmo sinal de -3 e -2, então a soma é também negativa.

Veja estes exemplos:

- (+ 8) + (+ 11) =+ 19. Os sinais são todos positivos.
- (– 14) + (– 100) =– 114. O sinal da soma é o mesmo sinal dos números.
- (+ 4) + (+ 7) + (+ 2) =+ 13. Visto que todos os sinais são positivos, some todos os números e a soma também será positiva.
- (– 5) + (– 2) + (– 3) + (– 1) =– 11. Agora todos os números são negativos, então some os números e coloque o sinal de menos na soma.

Adicionar números de sinais iguais é fácil!

Somando números de sinais diferentes

Será que um relacionamento entre um leonino e um geminiano resultaria em alguma coisa? Eu não sei a resposta para esta pergunta, mas eu sei que números com sinais diferentes somam rapidinho. Você só precisa saber como fazer e, nesta parte, eu vou te dizer como.



Quando os sinais de dois números são diferentes, esqueça os sinais por um tempo e ache a diferença entre os números. Esta é a diferença entre os valores absolutos. (Para revisar valores absolutos, volte para a parte "Introduzindo operações não binárias" neste capítulo). O número mais distante do zero determina o sinal da resposta.

$(+ a) + (- b) = + (|a| - |b|)$ se o a positivo está mais longe do zero.

$(+ a) + (- b) = - (|b| - |a|)$ se o b negativo está mais longe do zero.

Veja o que acontece quando você soma números com sinais diferentes:

- Você tinha R$20,00 na sua carteira e gastou R$12,00 comprando ingresso para o teatro.

  (+ 20) + (– 12) =+ 8

  Depois de pagar você ainda fica com R$8,00.
- Eu tenho R$20,00, mas para encher o tanque do meu carro tenho que gastar R$32,00.

  (+ 20) + (– 32) =– 12

  Eu vou ter que pedir emprestado R$12,00 se quiser encher o tanque.

Os próximos exemplos te dão mais algumas combinações:

- (+ 6) + (– 7) =– 1. A diferença ente 6 e 7 é 1. O número sete está mais longe do 0 do que o número 6, por isso a resposta é -1.
- (– 6) + (+ 7) =+ 1. Agora o 7 é positivo. E esta mais longe do 0 do que o número 6. A resposta agora é +1.

- $(-4) + (+3) + (+7) + (-5) = +1$. Se você usa a ordem da esquerda para a direita (embora você possa somar em qualquer ordem que queira), você soma os dois primeiros números para achar -1. Soma este resultado ao próximo número para achar +6. Depois soma com o último número para chegar a +1.

Subtraindo números com sinais

Subtrair números com sinais é muito fácil de fazer: você não faz! Ao invés de inventar um novo conjunto de regras pra subtrair números com sinais, os matemáticos decidiram que era mais fácil transformar os problemas de subtração em problemas de adição e usar as regras que eu expliquei no tópico anterior.

Pense nisso por um momento. Transforme o problema de subtração em um de adição. Não faz muito sentido, faz? Todos sabem que não se pode simplesmente mudar uma operação aritmética e esperar achar a mesma resposta ou, então, a resposta correta. Você descobriu há muito tempo atrás que $10 - 4$ não é o mesmo que $10 + 4$. Você não pode simplesmente mudar a operação e esperar que ela funcione corretamente.

Então, para fazer isso funcionar você muda duas coisas para ajustar os fatos.



Ao subtrair números com sinais, mude o sinal de menos para um sinal de mais e troque o número que estava com o sinal de menos pelo seu oposto. Depois é só somar os números usando as regras e somando os números com sinais. Veja o Capítulo 1 para mais sobre números opostos.

- $(+a) - (+b) = (+a) + (-b)$
- $(+a) - (-b) = (+a) + (+b)$
- $(-a) - (+b) = (-a) + (-b)$
- $(-a) - (-b) = (-a) + (+b)$

Chegando com nada

Considere adicionar dois números com sinais diferentes onde não há nenhuma diferença entre os valores absolutos desses números:

$(+3) + (-3)$

$(-5) + (+5)$

A diferença dos números sem os sinais é zero. E devido ao fato do zero não ser nem positivo e nem negativo – ele não tem sinal – é que para determinar o sinal da resposta deve-se saber qual número está mais longe do zero. Nenhum deles ganha! Então, nos exemplos a seguir, o zero é o herói.

$(-10) + (+10) = 0$

$(-a) + (+a) = 0$

$(+abc) + (-abc) = 0$

Nos dois últimos exemplos, suponha que a, b e c são os mesmos ao longo da expressão.

Os exemplos a seguir aplicam esses conceitos em casos reais:

- O submarino estava a sessenta pés abaixo da superfície quando o capitão gritou,"Submergir!". O submarino desceu mais 40 pés.

  $-60 - (+40) = -60 + (-40) = -100.$

  Mude de subtração para adição. Mude o 40 para o seu oposto -40. Depois use as regras da adição. O submarino está agora a 100 pés abaixo da superfície.

- Crianças jogam uma versão de "Mãe, eu posso?", onde os jogadores podem perguntar "Mãe eu posso dar três passos à frente?". A resposta "Sim" permite que o jogador dê três passos para perto da mãe. A reposta "Não" quer dizer que o jogador dá três passos para trás. Um jogador pode perguntar "Mãe, eu posso dar quatro passos para trás?". Neste caso, a resposta "Não" significa dê quatro passos para frente. O resultado destas duas respostas é

  $(-3) - (-4) = (-3) + (+4) = +1$

  Troque o -4 pelo seu oposto para mudar de subtração para adição. O jogador está um passo mais perto da mãe depois de duas jogadas.



Para subtrair números com sinais, mude o sinal de menos pelo sinal de mais e mude o sinal do número que segue.

Multiplicando e dividindo números com sinais

Multiplicação e divisão são, com certeza, as operações mais fáceis de fazer com os sinais. Enquanto você puder multiplicar e dividir, as regras são simples e são exatamente as mesmas para as duas operações.



Ao multiplicar e dividir dois números com sinais: se os dois sinais são iguais, o resultado é positivo; quando os dois sinais são diferentes, o resultado é negativo.

$(+a) \times (+b) = +ab$ $\quad (+a) \div (+b) = +(a \div b)$

$(+a) \times (-b) = -ab$ $\quad (+a) \div (-b) = -(a \div b)$

$(-a) \times (+b) = -ab$ $\quad (-a) \div (+b) = -(a \div b)$

$(-a) \times (-b) = +ab$ $\quad (-a) \div (-b) = +(a \div b)$

Observe em quais casos a resposta é positiva e em quais casos é negativa. Note também que a multiplicação e a divisão aparecem da mesma forma de sempre, exceto pelos sinais positivos e negativos. Veja os exemplos a seguir:

- $(-8) \times (+2) = -16$
- $(-5) \times (-11) = +55$

- $(+24) \div (-3) = -8$
- $(-30) \div (-2) = +15$

Você pode misturar essas operações fazendo várias multiplicações e divisões ou misturar uma de cada, fazendo a regra do par ou ímpar.



Regra do par ou ímpar: ao multiplicar ou dividir um bocado de números, conte os números negativos para determinar o sinal final. Um número par de números negativos significa que o resultado é positivo. Já um número ímpar de números negativos diz que o resultado é negativo. Os exemplos a seguir mostram a você como isso é feito:

- $(+2) \times (-3) \times (+4) = -24$: Este problema tem apenas um sinal negativo. Por um ser um número ímpar (e às vezes o mais solitário), a resposta é negativa.
- $(+2) \times (-3) \times (+4) \times (-1) = +24$: Dois sinais negativos significam uma resposta positiva porque dois é um número par.
- $\frac{(+4) \times (-3)}{(-2)} = +6$: Um número ímpar de números negativos significa uma resposta positiva.
- $\frac{(-12) \times (-6)}{(-4) \times (+3)} = -6$: Três sinais negativos devolvem um sinal negativo.
- $(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = -1$: Um número ímpar de sinais negativos te dá uma resposta negativa.

Finalmente você pode provar pra sua mãe que algumas vezes um erro *realmente* justifica o outro.

Trabalhando com nada: Zero e os números com sinais

Qual papel do zero no show dos números com sinais? O que ele faz com o sinal das respostas? Bem, quando você está somando ou diminuindo, o que o zero faz depende de onde ele está. Quando você multiplica ou divide, o zero tende a eliminar os números e deixar você com nada.



Algumas diretrizes sobre o zero:

- **Adicionando zero:** $0 + a$ é somente a. O zero não muda o valor de a. (Isto também é verdade para $a + 0$).
- **Subtraindo zero:** $0 - a = -a$. Use a regra de subtrair números com sinais: mude a operação da subtração para a adição e troque o sinal do segundo número. Da mesma maneira, $a - 0 = a$. O valor de a não muda quando subtraído de zero.



- **Multiplicando por zero:** $a \times 0 = 0$. Se você está num clube com muitos amigos e nenhum de vocês tem nada, multiplicar o que cada um de vocês tem vai resultar em nada. Da mesma maneira, $0 \times a = 0$.

  Multiplicar um número por zero sempre terá como resposta zero.

- **Divisão com zero:** $0 \div a = 0$. Nesse caso, se você e seus amigos tem nada, dividir esse nada em partes significa que cada parte terá nada. No caso contrário: você não pode usar o zero como divisor porque se você tem a coisas, você não pode dividi-las em 0 partes.

Então, trabalhar com o zero não é tão complicado. Você segue as regras normais de adição e a subtração, além de ter de se lembrar que multiplicar e dividir por zero deixará você com nada – literalmente.

Associando e transformando as expressões

As operações algébricas seguem algumas regras, e estas regras têm certas propriedades. Neste tópico eu falo sobre duas destas propriedades – a propriedade comutativa e a associativa.

Reordenando operações: a propriedade comutativa

Antes de discutir a propriedade comutativa, dê uma olhada na palavra comutar. Você provavelmente comuta para o trabalho ou para a escola e você sabe que se for de casa para o trabalho ou do trabalho para casa a distância é a mesma. A distância não muda porque você muda de direção (ainda que chegar em casa na hora do rush pode dar a sensação de uma distância maior).

O mesmo princípio é verdadeiro para algumas operações algébricas. Não importa se você soma 1 + 2 ou 2 + 1, a resposta continua sendo 3. Da mesma forma, 2 × 3 ou 3 × 2 será sempre igual a 6.



A propriedade comutativa diz que você pode mudar a ordem dos números em uma operação sem afetar o resultado. Adição e multiplicação são comutativas. Subtração e divisão não são. Então,

$a + b = b + a$

$a \times b = b \times a$

$a - b \neq b - a$ (exceto em alguns casos especiais)

$a \div b \neq b \div a$ (exceto em alguns casos especiais)

Em geral, subtração e divisão não são comutativas. Os casos especiais acontecem quando você escolhe os números com cuidado. Por exemplo, se *a* e *b* são os mesmos números, então a subtração aparenta ser comutativa porque se mudarmos a ordem, a resposta continua a mesma. No caso da divisão, se *a* e *b* são opostos, você tem como resposta -1, não importa a ordem na qual você os dividiu. É por isso que em matemática as provas são muito importantes. Alguns casos especiais podem funcionar, mas uma regra ou um teorema de verdade tem de funcionar em todos os casos.

Veja os seguintes exemplos:

- $4 + 5 = 9$ e $5 + 4 = 9$ então $4 + 5 = 5 + 4$
- $3 \times (-7) = -21$ e $(-7) \times 3 = -21$ então $3 \times (-7) = (-7) \times 3$
- $(-5) - (+2) = (-7)$ e $(+2) - (-5) = +7$ então $(-5) - (+2) \neq (+2) - (-5)$
- $(-6) \div (+1) = -6$ e $(+1) \div (-6) = -1/6$ então $(-6) \div (+1) \neq (+1) \div (-6)$



Tenha em mente que a propriedade comutativa é verdadeira apenas para a adição e a multiplicação.

Associando expressões: a propriedade associativa

A propriedade comutativa diz respeito à ordem dos números quando você faz uma operação. A propriedade associativa está voltada para a maneira como os números estão agrupados quando você faz uma operação com mais de dois números.

Pense no que a palavra associar significa. Quando você se associa com alguém, você está perto daquela pessoa, ou você forma um grupo com a pessoa. Digamos que Anika, Becky e Cora são sócias. Se Anika pega Becky e as duas pegam Cora na casa dela, ou Cora está na casa de Becky e Anika pega as duas ao mesmo tempo, o resultado vai ser sempre o mesmo, ou seja, no final da operação, as mesmas pessoas vão estar dentro do carro.



A propriedade associativa diz que se o agrupamento da operação muda, o resultado permanece o mesmo (se você precisa revisar agrupamento, dê uma olhada no Capítulo 1). Adição e multiplicação são associativas. Subtração e divisão não são associativas. Então,

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

$a - (b - c) \neq (a - b) - c$ (exceto em alguns casos especiais)

$a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$ (exceto em alguns casos especiais)

Você pode sempre achar alguns casos onde a propriedade funciona mesmo quando não deveria. Por exemplo, no problema de subtração $5 - (4 - 0) = (5 - 4) - 0$ a propriedade parece funcionar. Também no problema de divisão $6 \div (3 \div 1) = (6 \div 3) \div 1$ a propriedade parece funcionar. Embora haja exceções, uma regra deve funcionar o tempo todo.

Alguns exemplos com números reais podem tornar isso mais claro:

- $4 + (5 + 8) = 4 + 13 = 17$ e $(4 + 5) + 8 = 9 + 8 = 17$
  Então, $4 + (5 + 8) = (4 + 5) + 8$
- $3 \times (2 \times 5) = 3 \times 10 = 30$ e $(3 \times 2) \times 5 = 6 \times 5 = 30$
  Então, $3 \times (2 \times 5) = (3 \times 2) \times 5$
- $13 - (8 - 2) = 13 - 6 = 7$ e $(13 - 8) - 2 = 5 - 2 = 3$
  Então, $13 - (8 - 2) \neq (13 - 8) - 2$
- $48 \div (16 \div 2) = 48 \div 8 = 6$ e $(48 \div 16) \div 2 = 3 \div 2 = \frac{3}{2}$
  Então, $48 \div (16 \div 2) \neq (48 \div 16) \div 2$

As propriedades associativa e comutativa são úteis quando você trabalha com expressões algébricas. Você pode mudar a ordem de alguns números ou mudar a posição de agrupamento para tornar o exercício menos bagunçado ou mais conveniente. Apenas tenha em mente que você pode comutar e associar adição e multiplicação, mas nunca diminuição e divisão.

Capítulo 3

Entendendo frações e lidando com decimais

Neste capítulo:

- Fracionando números inteiros em decimais
- Transformando frações
- Praticando operações em frações ao invés de pessoas
- Dividindo uma torta inteira em pedaços

De vez em quando os alunos de matemática gostariam que o mundo fosse feito apenas de números inteiros. Mas os números não-inteiros, chamados de frações, realmente fazem do mundo um lugar maravilhoso (Bem, eu posso estar exagerando um pouco). De qualquer forma, frações estão aqui para ficar, e este capítulo ajuda você a explorar todas elas nos seus feitos maravilhosos.

Compare o processo inicial de gostar das frações com o de assistir ou praticar um esporte. Se você quer desfrutar e apreciar um jogo, você tem que entender as regras. Você sabe que isso é verdade se você assiste a jogos de futebol. As regras de impedimento são difíceis de entender. Mas finalmente você as entende, descobre as regras básicas do jogo, e passa a amar o esporte. Este capítulo começa com as regras básicas das frações para que você possa *jogar o jogo*. Você deve achar que os decimais não pertencem a um capítulo sobre frações, mas não há lugar melhor para eles do que aqui. Os decimais são a forma abreviada para as frações. As palavras mais usadas são abreviadas, como Sr., Dr., Ter., Out., e tantas outras! Da mesma forma, as frações com denominadores de 10, 100, 1.000 e assim por diante, são abreviadas com decimais.

Separando os números e colocando-os juntos de novo

Entendendo frações, de onde elas vêm e porque elas são do jeito que são ajudam você a trabalhar com elas. Uma fração tem duas partes:

$$\frac{superior}{inferior} \text{ ou } \frac{numerador}{denominador}$$



O denominador, ou número inferior, se refere ao número total de partes. O numerador, ou número superior, diz quanto do total (número inferior) está sendo considerado.

Talvez você possa lembrar o lugar exato dos números e os nomes apropriados se você pensar desta maneira:

- **N: Numerador; Norte;** ↑
- **D: Denominador; Debaixo;** ↓

Em todos os casos usando frações, os denominadores te dizem quantas porções ou pedaços *iguais* se têm. Sem a regra do *igual* você poderia receber pedaços em vários tamanhos diferentes. Por exemplo, em uma receita pede ½ xícara de farinha, se você não soubesse que ½ quer dizer uma parte de duas partes *iguais*, então poderia pensar que seriam duas partes *não iguais* – uma grande e uma pequena. Qual das duas partes deveria ser usada na receita dos biscoitos: a grande ou a pequena?

Junto com as terminologias *numerador* e *denominador* as frações podem ser de três tipos: *próprias*, *impróprias* e *mistas*, que vão ser vistas nos tópicos seguintes.

Saudando as frações próprias

A fração imprópria é o tipo mais simples de fração e é sempre parte de um todo. Uma torta inteira pode ser dividida em frações próprias. Uma peça de teatro pode ser dividia em frações – atos ou cenas.



Barras de fração romanas

Os romanos não usavam os símbolos usados hoje para indicar frações, como a barra de fração e os números. Mas os romanos reconheciam frações e tinham palavras para elas:

$\frac{11}{12}$ era deunx, ou retirado $\frac{1}{12}$

$\frac{10}{12}$ era dextans, ou retirado $\frac{1}{6}$

$\frac{9}{12}$ era dodrans, ou retirado $\frac{1}{4}$

$\frac{8}{12}$ era bi, ou retirado $\frac{1}{3}$

É interessante ver que os romanos entendiam frações como algo que era retirado – talvez eles percebessem um copo com líquido pela metade como algo meio vazio ao invés de meio cheio.

Fibonacci, durante o século treze, foi o primeiro matemático europeu a usar o sinal de fração que é usado hoje. O sinal é encontrado também em manuscritos da Idade Média. No entanto, em impressões geralmente era omitido, talvez por causa de dificuldades tipográficas.



Em uma *fração própria* o numerador é sempre menor do que o denominador e o seu valor é sempre menor do que um.

Dê uma olhada nas frações próprias a seguir:

- $\frac{5}{6}$: Fatie um bolo em seis pedaços (seis mostra quantas partes formam o total). Comendo um pedaço, você ainda fica com cinco pedaços. Que bom pra você! Você pode fazer um bolo e comer também!
- $\frac{4}{12}$: Você levou quatro meses do ano passado para terminar o projeto.
- $\frac{1}{16}$: Uma libra de manteiga é igual a 16 onças. Coloque uma onça de manteiga na pipoca.

Lembre-se: Um minuto na boca, o resto da vida nos quadris!

Conhecendo as frações impróprias

Uma fração imprópria tem mais partes do que o normal para um número inteiro (e isso não tem nada a ver com falta de decoro!). No entanto, estas frações inconstantes são úteis em várias situações. O número inferior te diz o tamanho dos pedaços. É que no caso de frações impróprias, há mais pedaços do que o suficiente para fazer um número inteiro.



Frações impróprias são frações onde os numeradores são maiores do que os denominadores.

- $\frac{15}{8}$: Depois da festa Maria colocou todos os pedaços de pizza que sobraram juntos. Tinha 15 pedaços, cada um representando $\frac{1}{8}$ da pizza.
- $\frac{4}{3}$: Duplicar a quantidade de açúcar na receita requer quatro medidas de açúcar, cada uma representando $\frac{1}{3}$ da xícara.

Elas podem ser chamadas de impróprias, mas essas frações se comportam muito bem.

Misturando as frações impróprias com números mistos

Frações impróprias podem ser um pouco difíceis, mas os números mistos ajudam a limpar a cena. Usar um número misto – aquele que tem um número inteiro e uma fração – para expressar o mesmo que uma fração imprópria torna as coisas mais fáceis de lidar. Por exemplo, ao invés de usar a fração imprópria $\frac{4}{3}$, você pode usar o número misto $1\frac{1}{3}$. Receitas são mais fáceis de usar; tamanhos de chapéus são fáceis de ler.



Convertendo frações em Wall Street

As ações na Bolsa de Valores dos Estados Unidos eram precificadas usando-se frações para as partes. Você poderia ver preços do tipo $16\frac{3}{4}$, e ler que os preços caíram $\frac{5}{8}$. Supõe-se que esse costume de usar frações começou quando as moedas podiam ser divididas em pedaços; é mais fácil dividir algo ao meio do que dividir a metade em duas partes (a quarta parte), e a quarta parte em metades (a oitava parte), e assim sucessivamente.

No ano 2000, o mercado de ações mudou essas partes para decimais. Isto não foi uma resposta ao desejo de entrar no método decimal, mas somente uma medida para tornar os incrementos menores. Existem oito divisões entre cada número e o próximo se você usa oitavos, e dez divisões usando decimais ou décimos. Os décimos são menores do que os oitavos, então têm menos passos indo para cima (ou para baixo).



Um *número misto* apresenta um número inteiro e uma fração, como mostram os exemplos a seguir:

- $4\frac{1}{2}$: Uma receita pede quatro xícaras e meia de farinha.
- $7\frac{3}{8}$: O tamanho do chapéu é 7 mais $\frac{3}{8}$, então não é tão apertado.
- $5\frac{7}{12}$: Já fazem 5 anos e 7 meses que ele voltou da Europa.

Seguindo a excelente dieta de redução de frações

Logo quando você pensou que tinha ouvido falar de todas as maneiras possíveis para emagrecer, aqui vem outra. Emagreça! Se ao menos perder peso fosse tão fácil quanto reduzir frações!

Quando você usa frações, você quer que elas sejam as mais legais possíveis. Neste caso, *legal* quer dizer com os menores números possíveis no numerador e denominador da fração. De vez em quando números pequenos são melhores de lidar, mais fáceis de entender e visualizar. Fazer aritmética é mais fácil com números menores também.



Os menores termos são desejáveis quando pegamos dinheiro emprestado e quando lidamos com frações. Uma fração está com seus menores termos quando nenhum número (exceto 1) divide o numerador e o denominador de maneira exata.

Entendendo frações equivalentes

Quando você multiplica ou divide o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número, você não muda o valor da fração. Na verdade, você

está basicamente multiplicando ou dividindo por um. Isso porque toda vez que o numerador e o denominador de uma fração são os mesmos, a fração é igual a um. Se você divide o numerador e o denominador de $\frac{16}{32}$ por 4, você está basicamente dividindo $\frac{16}{32}$ por $\frac{4}{4}$, o que é igual a 1.

- $\frac{4}{5}$ tem o mesmo valor de $\frac{48}{60}$, que tem o mesmo valor de $\frac{32}{40}$.
- $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 12}{5 \times 12} = \frac{48}{60}$
- $\frac{32}{40} = \frac{32 \div 8}{40 \div 8} = \frac{4}{5}$
- $\frac{32}{40} = \frac{32 \times 1.5}{40 \times 1.5} = \frac{48}{60}$

No entanto, nem todas as frações com números grandes podem ser escritas com números menores. Algumas regras devem ser seguidas para que a fração mantenha sua integridade; ela tem que ter os mesmos valores que tinha originalmente.

Para reduzir frações aos seus menores termos, siga esses passos:

Como exemplo, vamos reduzir $\frac{48}{60}$ aos menores termos.

1. **Procure números que dividem igualmente o numerador e o denominador.**

   No exemplo, 12 divide 48 e 60 igualmente.

2. **Faça a divisão.**

   $$\frac{48 \div 12}{60 \div 12} = \frac{4}{5}$$

3. **Coloque a fração simplificada no seu problema.**

   Então, ao invés de trabalhar com $\frac{48}{60}$, você pode trabalhar com $\frac{4}{5}$.

Quando você pode usar esse processo de redução? O que aconteceria se você esperasse 48 minutos na fila para comprar uma passagem aérea? Estes são os 48 minutos dos 60 que têm em uma hora. A fração é escrita como $\frac{48}{60}$. Você pode ver que 48 minutos de 60 é muito tempo. Para entender melhor o que está acontecendo, coloque a fração em termos menores: 12 divide 48 e 60 de forma exata. Você gasta $\frac{4}{5}$ de uma hora esperando na fila.

Percebendo porque o menor é melhor

Por que $\frac{4}{5}$ é melhor do que $\frac{48}{60}$? A maioria das pessoas se relaciona melhor com os números menores. Você pode imaginar mais facilmente na sua cabeça quatro coisas de um total de cinco do que 48 de 60 – recorra a Figura 3-1 se você não acredita em mim. Alguns exemplos podem te ajudar a entender:

- Uma pesquisa descobriu que 162 pessoas de um total de 198 preferiam a pasta de amendoim Bix. A fração $\frac{162}{198}$ se reduz a $\frac{9}{11}$, que oferece mais informação sobre a preferência pela pasta de amendoim.
- Uma propaganda na TV dizia: "Nove dentre dez dentistas pesquisados preferem a pasta de dentes Squishy". Eu sempre imaginei quantos dentistas foram realmente pesquisados. A fração $\frac{9}{10}$ dá boa informação sobre a preferência, mas foram somente dez dentistas pesquisados? Ou podem ter sido mil?

A Figura 3-1 é uma ilustração que mostra porque o menor é melhor. Na esquerda há um total de sessenta divisões. Na direita há um total de cinco divisões.

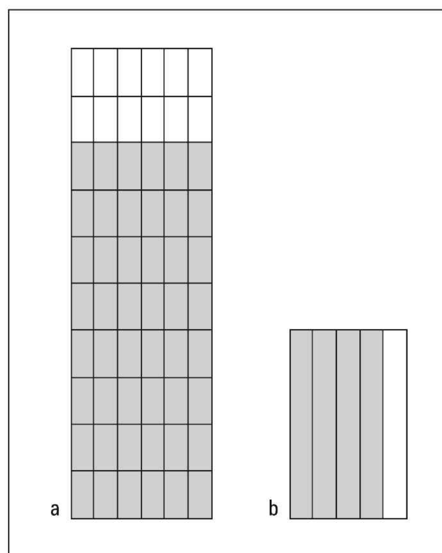


Figura 3-1: Quarenta e oito ou sessenta, ou quatro ou cinco? Você decide.

- Você pagou 18 prestações de um total de 36 por uma nova televisão. Ambos os números são divisíveis por 18 – 18 vai em 18 uma vez (1), e em 36 duas vezes (2). Então você sabe que chegou a metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ do seu total de pagamentos.

  Isto é $\frac{18}{36} = \frac{18 \div 18}{36 \div 18} = \frac{1}{2}$.

  Você já pagou metade ou falta metade – depende de como você se vê: um copo meio cheio ou um copo meio vazio.

- Seu jogador de basquete preferido jogou 94 períodos até agora. Como um jogo oficial de basquete tem quatro períodos, ele jogou $\frac{94 \text{ períodos}}{4 \text{ períodos por jogo}} = 23\frac{2}{4}$ jogos.

  Porque $\frac{94}{4}$ é uma fração imprópria, divida primeiro 94 por 4 e escreva o resto em forma de fração. $\frac{94}{4} = 23\frac{2}{4} = 23\frac{1}{2}$ jogos.



O *resto* é o valor que sobra quando um número é dividido por outro.

Mudando a aparência sem mudar o valor ou o que fazer quando você não pode ir mais baixo

É sempre bom quando você pode reduzir uma fração para torná-la mais fácil de usar. A fração $\frac{3}{4}$ é bem melhor do que $\frac{447}{596}$ Apesar de às vezes a fração não querer cooperar, você ainda tem opções. Você pode arredondar para mais ou para menos e depois multiplicar ou dividir por um.

Arredondando para mais ou para menos

Tente reduzir $\frac{25}{36}$ em termos menores. Vinte e cinco pode ser dividido por 5 ou por 25, e 36 pode ser dividido por 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36, mas nenhum destes últimos é compatível com 5 ou 25. Mesmo que 25 e 36 não sejam números primos, eles não têm nenhum fator em comum. A fração não pode ser reduzida.

Em casos onde a fração não pode ser reduzida a termos menores, você pode simplesmente deixá-la em paz, ou, se você estiver disposto, arredondar o numerador ou o denominador para mais ou para menos para torná-la redutível.

Por exemplo, $\frac{301}{498}$ não pode ser reduzida. Mas, se você arredondar o numerador para 300 e o denominador para 500, você fica com a fração aproximada $\frac{300}{500}$ que se reduz para $\frac{3}{5}$. Neste caso, o arredondamento não muda muito o valor. Você só precisa usar o seu julgamento.



Dividindo por um

Qualquer número dividido por um é igual a ele mesmo. Para qualquer número real *n*,

$$n \div 1 = n.$$

Então, saber disso permite que você mude a aparência de uma fração sem mudar o seu valor. Você vê como isto funciona neste exemplo?

$$\frac{8}{12} \div 1 \text{ poderia ser } \frac{8}{12} \div \frac{4}{4} = \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Você faz a mesma coisa na parte de cima e de baixo da fração, ou seja, você apenas divide por um, o que não muda o valor – somente a sua aparência.



Multiplicando por um

Qualquer número multiplicado por um é igual a ele mesmo. Para qualquer número real n,

$$n \times 1 = n.$$

Como na divisão, você pode multiplicar por um e mudar a aparência da fração sem mudar o seu valor. Ou seja,

$$4 \times 1 = 4 \qquad -8 \cdot 1 = -8 \qquad \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$

No caso das frações, ao invés de usar o número um, você usa uma fração que é igual a um.

$$1 = \frac{3}{3} = \frac{7}{7} = \frac{10}{10} = \ldots$$

Usar o valor fracionário para o número um permite que você mude a aparência da fração sem mudar o seu valor.

$$\frac{2}{3} \times 1 \text{ pode ser } \frac{2}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

A Tabela 3-1 lista algumas frações equivalentes para atividades do dia a dia.

Tabela 3-1 Algumas frações equivalentes

Frações	*Equivalente*
$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$	Metade de um jogo de basquete
$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15}$	Dois tempos de um jogo de hóquei
$\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{12}{21} = \frac{16}{28} = \frac{20}{35}$	Quatro dias da semana
$\frac{5}{9} = \frac{10}{18} = \frac{15}{27} = \frac{20}{36} = \frac{25}{45}$	Cinco voltas em um jogo de basebol
$\frac{7}{12} = \frac{14}{24} = \frac{21}{36} = \frac{28}{48} = \frac{35}{60}$	Sete meses do ano
$\frac{23}{24} = \frac{46}{48} = \frac{69}{72} = \frac{92}{96} = \frac{115}{120}$	Vinte e três horas de um dia

Acomodando as frações em conjunto

Para somar, diminuir ou comparar frações, você precisa de frações com número igual de partes. Em outras palavras, os denominadores têm que ser os mesmos.

Achando denominadores comuns

Denominadores comuns ou *números iguais* nos denominadores são necessários para adicionar, subtrair e comparar frações. Frações cuidadosamente selecionadas, que se igualam ao número um, são usadas para criar denominadores comuns, porque multiplicar por um não muda o valor do número.

Siga estes passos para achar o denominador comum de duas frações e escreva as frações equivalentes. Use as frações $\frac{7}{18}$ e $\frac{5}{24}$ como exemplo:

1. **Veja se você pode achar um denominador comum somente observando.**

   Os números 18 e 24 são muito grandes, e nenhum número vem à mente. Se, mesmo assim, você achar um denominador comum, vá direto para o passo 4.

2. **Determine qual fração tem o maior denominador.**

   Neste caso o número 24 é o maior dentre os dois denominadores.

3. **Cheque para ver se o menor denominador divide o maior de forma exata. Se isso não acontecer, cheque múltiplos do maior denominador até que você encontre um número que o menor denominador possa também dividir de maneira exata.**

   O número 18 não divide o número 24. Duas vezes 24 é igual a 48, mas 18 também não divide esse número. Três vezes 24 é igual a 72. Dezoito com certeza divide esse número. O denominador comum é 72.

4. **Escreva as duas frações como frações equivalentes com os denominadores comuns.**

   O número 24 divide 72 três vezes, então a fração $\frac{5}{24}$ é multiplicada por $\frac{3}{3}$.

   $$\frac{5\times3}{24\times3}=\frac{15}{72}$$

   Dezoito divide 72 quatro vezes, então a fração $\frac{7}{18}$ é multiplicada por $\frac{4}{4}$:

   $$\frac{7\times4}{18\times4}=\frac{28}{72}$$

Agora, siga os mesmos passos usando as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{12}$ como exemplo:

1. Ache o denominador comum.

   Os dois números, 8 e 12 têm o número 24 como múltiplo. Se você descobrir isso logo de cara, siga para o passo 4.

2. Determine qual fração tem o maior denominador.

   Neste caso, o número 12 é o maior dentre os denominadores.

3. Cheque os múltiplos.

   Oito não divide 12. Duas vezes 12 é igual a 24, e 8 divide exatamente este número. O denominador comum é 24.

4. Escreva como frações equivalentes.

   Doze divide 24 duas vezes, então a fração $\frac{5}{12}$ é multiplicada por $\frac{2}{2}$.

   $\frac{5\times 2}{12\times 2}=\frac{10}{24}$

   Oito divide 24 três vezes, então a fração $\frac{3}{8}$ é multiplicada por $\frac{3}{3}$.

   $\frac{3\times 3}{8\times 3}=\frac{9}{24}$



Ás vezes, você pode achar um denominador comum apenas multiplicando os dois denominadores. Este método nem sempre oferece a melhor e menor escolha, mas pode ser eficiente.

Ache o denominador comum para $\frac{5}{8}$ e $\frac{4}{9}$ Multiplique os denominadores: 8 x 9 = 72. Depois você pode ver o que você quer:

- $\frac{5}{8}=\frac{?}{72}$ e $\frac{4}{9}=\frac{?}{72}$.

  Multiplicando os numeradores pelos mesmos fatores você vai ter:

  $\frac{5\times 9}{8\times 9}=\frac{45}{72}$ e $\frac{4\times 8}{9\times 8}=\frac{32}{72}$.
- Ache um denominador comum para $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{12}$.

  Multiplique 5 x 12 para achar o denominador comum que é 60.

  $\frac{3}{5}=\frac{36}{60}$ e $\frac{5}{12}=\frac{25}{60}$.

Trabalhando com frações impróprias

Multiplicar e dividir frações impróprias (veja o tópico "Conhecendo as frações impróprias" no começo deste capítulo) não é mais difícil que multiplicar ou dividir outras frações. Entender o resultado final é mais fácil se você escrever a resposta em forma de número misto (veja o tópico "Misturando as frações impróprias com números mistos" no começo deste capítulo).

Para Transformar uma fração imprópria em número misto, divida o numerador pelo denominador. O quociente é o número inteiro que vem na frente e o resto – o valor que sobra – é escrito na forma de fração própria, que tem o numerador menor que o denominador. Veja as semelhanças e as diferenças entre os números mistos e frações impróprias nos exemplos a seguir:

- $\frac{11}{9}=1\frac{2}{9}$: O número 9 divide 11 apenas uma vez, tendo como resto o número 2.
- $\frac{26}{7}=3\frac{5}{7}$: O número 7 divide 26 três vezes, tendo como resto o número 5.
- $\frac{402}{11}=36\frac{6}{11}$: Onze divide 402 trinta e seis vezes, tendo como resto o número 6. Este exemplo deixa claro que o número misto é mais compreensível.

Colocando as frações para funcionar

Agora que você sabe tudo sobre frações – os nomes adequados, as características, pontos fortes e fracos e etc. – é hora de botá-las para funcionar. As regras para adição, subtração, multiplicação e divisão das frações são as mesmas usadas quando variáveis são adicionadas. As regras não mudam. Isto é tranqüilizador!

Adicionando e subtraindo frações

Adicionar e subtrair frações requer um pouquinho de atenção especial. Você pode somar um quarto de xícara e xícaras se você transformá-los na mesma unidade (um quarto de xícara). É o mesmo com frações. Você pode adicionar terços e sextos se você achar o denominador comum.



Para adicionar e subtrair frações:

1. **Converta as frações para que tenham o mesmo número no denominador.**
   Descubra como fazer isso no tópico "Achando denominadores comuns".
2. **Some ou diminua os numeradores. Deixe os denominadores em paz.**
3. **Simplifique a resposta caso necessário.**

- Jim jogou por meia hora na partida de futebol de ontem e por 20 minutos no jogo de hoje. Quando tempo ele jogou ao todo? Crie uma equação simples, do tipo $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ = horas que Jim jogou. Um meio e um terço não combinam. Você não pode simplesmente somar os numeradores e os denominadores porque dois quintos não será a resposta correta $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ não é igual a } \frac{2}{5}\right)$. Mas você percebe que $\frac{1}{2}$ também pode ser o mesmo que $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$, ou muitas outras frações. Assim como pode observar também que $\frac{1}{3}$ pode ser $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15}$ ou, de forma semelhante, outras frações. Então, você pode ajustar as duas frações multiplicando os denominadores e os numeradores pelo mesmo número. Multiplique $\frac{1}{2}$ por $\frac{3}{3}$ para chegar a $\frac{3}{6}$ multiplique $\frac{1}{3}$ por $\frac{2}{2}$ para chegar a $\frac{2}{6}$. $\left(\frac{3}{3} = 1 = \frac{2}{2}\right)$. Note que $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ podem ter 6 como denominador para que possam combinar: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ são iguais a $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$. Agora você pode somar os numeradores $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$. Depois resolva a equação: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$.

Jim jogou $\frac{5}{6}$ de uma hora no total.

Outra situação real mostra como você pode fazer as frações combinarem para fazer uma simples subtração.

- No seu testamento, Jane deu $\frac{4}{7}$ do seu dinheiro para a Sociedade Humane e $\frac{1}{3}$ do seu dinheiro para outras obras de caridade. Quanto sobrou de herança para seus filhos? As frações $\frac{4}{7}$ e $\frac{1}{3}$ não são compatíveis. Você não pode combinar ou comparar estas frações. A fração $\frac{4}{7}$ pode ser $\frac{8}{14}$ ou $\frac{12}{21}$ ou $\frac{16}{28}$ e mais. A fração $\frac{1}{3}$ pode ser $\frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}$ e mais. Pode levar um tempinho para encontrar uma boa combinação, mas $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$ e $\frac{1}{3} = \frac{7}{21}$. Some os numeradores para achar o total destinado para as caridades no testamento de Jane.

  $$\frac{12}{21} + \frac{7}{21} = \frac{19}{21}$$

  Diminua este total do total dos rendimentos de Jane para achar a parte destinada aos filhos.

  $$\frac{21}{21} - \frac{19}{21} = \frac{2}{21}$$

  Os filhos de Jane vão receber $\frac{2}{21}$ dos seus bens.

Multiplicando frações

Multiplicar frações é um pouquinho mais fácil do que somar ou diminuir frações. Isto se deve ao fato de você não precisar achar o denominador comum primeiro. A única condição é transformar qualquer número misto em fração imprópria. Então, no final, você deverá mudar novamente a fração para um número misto.



Ao multiplicar frações, siga estes passos:

1. **Transforme todos os números mistos em frações impróprias.**
2. **Multiplique o numerador por numerador e denominador por denominador.**
3. **Simplifique a resposta caso seja necessário.**

As histórias de Fred e Sadie oferecem oportunidades para multiplicar frações:

- Fred comeu $\frac{2}{3}$ de uma barra de chocolate de $\frac{3}{4}$ de quilo. Quantos bombons ele comeu?

  $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ quilo de chocolate (e 6 zilhões de calorias).

- Sadie trabalhou $10\frac{2}{3}$ horas de uma hora e meia. Por quantas horas ela vai ser paga?

  $10\frac{2}{3} \times 1\frac{1}{2} = \frac{32}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{96}{6} = 16$ horas ganhas para serem multiplicadas pelo valor pago pela hora.



Simplificando as frações antes de multiplicá-las pode tornar a multiplicação mais fácil. Números menores são mais manejáveis, e se você reduz as frações antes de multiplicar, você não precisa reduzi-las no final.

Esta é outra maneira de ver o problema sobre o chocolate do Fred:

- A expressão $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ tem o número 2 no primeiro numerador e o número 4 no segundo denominador. Embora eles não estejam na mesma fração, este é um problema de multiplicação. A multiplicação é comutativa, não importa a ordem usada para multiplicar os números. Então, você pode fazer de conta que 2 e 4 estão na mesma fração.

  Desta forma, dividindo o primeiro numerador por 2 e o segundo denominador por 2, você tem

  $$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}$$

  Mas, $\frac{1}{3} \times \frac{3}{2}$ tem um 3 no primeiro denominador e um 3 no segundo numerador. Você pode dividir por 3! Assim, $\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, que é a mesma resposta do exemplo original.

No exemplo anterior cada um dos métodos – usando a simplificação das frações antes ou depois da multiplicação – foi relativamente fácil. Este exemplo mostra o quão importante é simplificar *antes* de fazer o problema.

- Multiplique as duas frações: $\frac{360}{121} \times \frac{77}{900}$

  O numerador da primeira fração e o denominador da segunda fração podem ser divididos por 180.

  $$\frac{360}{121} \times \frac{77}{900} = \frac{2}{121} \times \frac{77}{5}$$

  O denominador da primeira fração e o numerador da segunda fração podem ser divididos por 11.

  $$\frac{2}{121} \times \frac{77}{5} = \frac{2}{11} \times \frac{7}{5}$$

  Agora a multiplicação é simples:

  $$\frac{2}{11} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{55}$$

  Isto é mais fácil do que o problema original teria sido.

As operações de adição e multiplicação têm outra característica especial que a subtração e a divisão não têm. Você pode efetuar a operação em mais de duas frações de uma vez.

- O exemplo a seguir mostra como multiplicar três frações ao mesmo tempo. Uma situação como esta pode acontecer se você estiver aplicando um desconto após o outro em cima de um preço original de tabela.

  $$\frac{5}{6} \times \frac{3}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5 \times 3 \times 4}{6 \times 8 \times 7} = \frac{60}{336} = \frac{5}{28}$$

Você pode tornar isto mais fácil se você simplificar primeiro: o 4 e o 8 no terceiro numerador e no segundo denominador, e o 3 e o 6 no segundo numerador e no primeiro denominador.

- Este exemplo envolve números mistos:

  $3\frac{1}{3} \times 5\frac{1}{4} \times 2 = \frac{10}{3} \times \frac{21}{4} \times \frac{2}{1}$

  Simplificar, primeiro, significaria dividir por 3 e por 2.

  $\frac{10}{3} \times \frac{21}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{10}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{70}{2} = 35$

Dividindo frações

Dividir frações é muito fácil! Quer dizer, isso significa dividir as sobras em pedaços suficientes para que todos ganhem um pedaço. Na verdade é como multiplicar frações, exceto pelo fato que o numerador e o denominador da segunda fração precisam mudar de lugar.



Ao dividir frações:

1. **Transforme todos os números mistos em frações impróprias.**
2. **Inverta a segunda fração, colocando o número de baixo em cima e o número de cima embaixo.**
3. **Continue com a multiplicação das frações.**

O exemplo a seguir mostra como o sistema funciona:

- Você comprou $6\frac{1}{2}$ quilos de carne e quer cortá-la em pedaços que pesam $\frac{3}{4}$ de um quilo cada.

  $6\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{13}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{13}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{52}{6} = 8\frac{4}{6} = 8\frac{2}{3}$

  Ter $8\frac{2}{3}$ de pedaços significa que você pode dividir a carne em 8 pedaços que pesam $\frac{3}{4}$ quilos, tendo um pequeno pedaço de sobra.

Lidando com decimais

Decimais nada mais são do que frações especiais. Elas são peculiares porque os seus denominadores são sempre 10, 100, 1000, e etc. – potências de dez. E justamente por esta especificidade, você não vai precisar se preocupar com a parte do denominador. Apenas escreva o numerador e use um ponto decimal para indicar que realmente é uma fração.



Abusando do ponto decimal

Quando um ponto decimal é usado impropriamente, pode custar caro. A quantia de noventa e nove centavos pode ser representada por um símbolo de centavos, 99¢, ou um símbolo do Dólar, \$.99. É quando as pessoas não são cuidadosas ou não entendem que você vê .99¢. Você acha que significa 99 centavos, mas não é isso quer dizer, o preço .99¢ significa noventa e nove centésimos de um centavo - menos do que um centavo.

Um amigo meu uma vez desafiou um estabelecimento de hambúrgueres a partir desse argumento. Eles anunciaram um hambúrguer muito grande pelo preço normal e qualquer adicional por .99¢. Ele foi lá e pediu esse hambúrguer pelo preço normal e dois adicionais por um centavo cada (Ele estava disposto a arredondar para um centavo inteiro). Quando o atrapalhado atendente finalmente entendeu o que tinha acontecido, ele atendeu o pedido do meu amigo. Na verdade, o meu amigo não queria arrumar uma confusão com o atendente, ele apenas quis apontar o erro. Mas você pode apostar que a placa foi rapidamente corrigida.



O símbolo do ponto decimal, que é muito pequeno, é tão importante quanto ao ponto no final de uma frase, então você tem que prestar atenção. Desta forma, você pode perceber que o mais importante é prestar atenção onde o ponto decimal é *colocado* no número.



O número de casas decimais à direita do ponto decimal indica o número de zeros da potência de dez que é escrita no denominador.

Veja a colocação do decimal nos seguintes exemplos:

- 0,3 tem apenas um dígito (3) à direita do ponto decimal. O 0,3 é $\frac{3}{10}$.
- 0,408 tem três dígitos (408) à direita do ponto decimal. O 0,408 é $\frac{408}{1{,}000}$.
- 60,0003 tem quatro dígitos (0003) à direita do ponto decimal. O 60,0003 é 60 e $\frac{3}{10{,}000}$.



Um dígito, ou algarismo, é qualquer número inteiro do zero até o nove

Frações decimais são ótimas porque você pode: adicionar, subtrair, multiplicar e dividir muito facilmente. É por isso que muitas vezes é desejável que se transforme a fração em decimal.

Transformando frações em decimais

Todas as frações podem ser transformadas em decimais. No Capítulo 1, eu disse que números racionais têm decimais que podem ser escritos na forma de frações. As formas decimais dos números racionais terminam ou repetem um padrão. Veja aqui como você pode transformar frações em decimais.



Para transformar uma fração em decimal, apenas divida o numerador pelo denominador.

$\frac{3}{4}$ é o mesmo que $3 \div 4 = 0{,}75$, então $\frac{3}{4} = 0{,}75$

$\frac{15}{8}$ é o mesmo que $15 \div 8 = 1{,}875$, então $\frac{15}{8} = 1{,}875$

Se a divisão não der exata você pode parar depois de certo número de casas decimais e arredondar.



Arredondando números:

1. **Determine o número de casas que você quer e observe uma além.**
2. **Aumente por um número a última casa que você quer, se o número observado mais distante for cinco ou maior.**
3. **Deixe a última casa como está se o número mais distante é menor do que cinco.**

A fração $\frac{5}{9}$ não é uma divisão exata e vai seguir infinitamente quando a divisão for realizada. Então divida e decida quando parar.

Transforme $\frac{5}{9}$ em decimal.

$5 \div 9 = 0{,}5555...$



Se você decidir arredondar para 3 casas decimais, $\frac{5}{9} = 0{,}55555... \approx 0{,}556$

O símbolo $\approx$ significa *aproximadamente ou quase igual.* Este é um símbolo prático para usar quando arredondamos um número.

- Agora tente transformar $1\frac{5}{8}$ em decimal.

  $1\frac{5}{8} = \frac{13}{8}$

  $13 \div 8 = 1{,}625$

- Tente transformar $\frac{4}{7}$ em decimal.

  $4 \div 7 = 0{,}571428571428$

  Se for arredondado para 4 casas, a resposta é $\frac{4}{7} \approx 0{,}5714$

  Se for arredondado para 5 casas, a reposta é $\frac{4}{7} \approx 0{,}57143$

Transformando decimais em frações



Para transformar um decimal em fração, coloque os números à direita do ponto decimal no numerador. Coloque o número 1 no denominador seguido de zeros. O número de zeros vai corresponder ao número de dígitos à direita do ponto decimal.

- Transforme 0,36 em fração:

  $$0{,}36 = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$$

  O número 36 tem dois dígitos, então o número 1 é seguido por dois zeros.

- Transforme 0,403 em fração:

  $$0{,}403 = \frac{403}{1{,}000}$$

  O número 403 tem três dígitos, então o número 1 é seguido por três zeros.

- Transforme 0,0005 em fração:

  $$0{,}0005 = \frac{5}{10{,}000} = \frac{1}{2{,}000}$$

  Não se esqueça de contar os zeros antes do cinco ao contar o número de dígitos.

- Transforme 3,025 em fração:

  $$3{,}025 = 3\frac{25}{1{,}000} = 3\,\frac{1}{40}$$

Você só precisa contar as casas decimais e os zeros.

Capítulo 4

Explorando expoentes e elevando radicais

Neste capítulo:

Escrevendo números gigantescos com expoentes

Tocando o microscópico

Operando expoentes e radicais

Trabalhando com radicais

Expoentes, aqueles símbolos minúsculos, um pouco acima e à direita do número, foram criados para que os matemáticos não continuassem se repetindo! O que é um expoente? Um expoente é esse número sobrescrito à direita de um número real e que indica quantas vezes você múltipla o número real, chamado de base, por ele mesmo. Ou seja, três elevado à quarta potência (3^4) é o mesmo que três multiplicado por ele mesmo quatro vezes. Entendeu? Agora, tente e veja o que acontece.

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = [(3 \times 3) \times 3] \times 3 = 81$$

Então, três elevado à quarta potência (3^4) é outra maneira de dizer 81.



Quando você se deparar com sinais de agrupamento, como parênteses ou colchetes, faça o que estiver no agrupamento antes de fazer qualquer outra operação. Para mais informação sobre os sinais de agrupamento, olhe o Capítulo 1.



Pagando um débito real exponencialmente

Há uma antiga história sobre um rei que voltou atrás nas promessas feitas a um cavaleiro que salvou seu castelo de um dragão que cuspia fogo. O rei deveria ter pago ao cavaleiro dois sacos de ouro pela sua bravura e pelo sucesso do esforço.

Depois que o cavaleiro havia matado o dragão, o rei estava relutante para pagar – afinal de contas, nada de incêndio nas redondezas! Então, o já frustrado cavaleiro, querendo receber a sua merecida recompensa, barganhou com o rei. Ficou combinado que no dia 1° de Janeiro, o rei pagaria um centavo, e ele dobraria o valor todos os dias até o final de Abril. Então, no dia 2 de Janeiro, o rei pagaria dois centavos. No dia 3 de Janeiro, quatro centavos. No dia 4 de Janeiro, oito centavos. No dia 5 de Janeiro, o rei pagaria 16 centavos. E assim em diante até o dia 30 de Abril. O rei pensou que era um bom negócio. Afinal de contas, o cavaleiro só estava pedindo algumas das moedas de menor valor que o rei tinha. Então ele aceitou e começou a pagar o cavaleiro. Tudo foi bem até o final de Janeiro. No dia 20 de Janeiro, o rei tinha que pagar 524.288 centavos. E no dia 20 de Fevereiro, ele tinha que pagar 109.951.162.800 centavos. No último dia, 30 de Abril, o rei tinha que pagar mais de 66.461.399.790.600.000.000.000.000.000.000.000.000 centavos. Some todos os centavos de todos os dias e o valor total vai ser mais do que 132.922.799.600.000.000.000.000.000.000.000.000.000 centavos.

Duplicando centavos, o cavaleiro chegou a mais de trilhões de trilhões.

Imagine quem é o rei agora!

Multiplicando a mesma coisa repetidamente

Quando a álgebra foi originalmente escrita com símbolos – ao invés de com todas as palavras – não havia expoentes. Se você quisesse multiplicar a variável x por ela mesma seis vezes, você escreveria: xxxxxx (como uma criança apertada em uma viagem de carro: "Xixi! Xixi! Xixi!"). Escrever a variável várias vezes pode ser cansativo (como uma criança de três anos é), então o maravilhoso sistema de expoentes foi criado.



Uma variável é uma letra que representa um número desconhecido ou o valor que você procura em um problema de álgebra.

Acionando a notação científica

Uma coisa é escrever números com expoentes e outra é saber o que esses expoentes significam e o que você pode fazer com eles. Usar expoentes é tão conveniente que vale o tempo e o trabalho para descobrir as regras para usá-los.



Um expoente é um número pequeno escrito acima e à direita da base – o número que você está multiplicando por ele mesmo. O expoente vem normalmente em letras miúdas, menores do que as da base. A base de um expoente pode ser qualquer número real (olhe o glossário caso precise de uma definição). O expoente, ou potência, também pode ser qualquer número real. Um expoente pode ser positivo, negativo, em forma de fração, ou até mesmo um radical. Que potência! O exemplo a seguir dá outra demonstração de quão conveniente os expoentes podem ser.

$x^n = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdots$ *n vezes*

x: a base	x pode ser qualquer número real
n: potência, expoente	n pode ser qualquer número real



Mesmo que o x na expressão x^n possa ser qualquer número real e o n possa também ser qualquer número real, os dois não podem ser 0 ao mesmo tempo. 0^0 não tem significado na álgebra. Você vai precisar estudar Cálculo para discutir isso. Além disso, se x é igual a 0, então n não pode ser negativo.

Nos exemplos a seguir, a base é multiplicada n vezes e a expressão exponencial é desenvolvida.

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

$10^8 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000.000$



Uma coisa legal sobre potências de dez é que o expoente te diz quantos zeros há na resposta.

Neste exemplo, muitas bases são multiplicadas juntamente. Cada base tem seu próprio expoente. As letras x, y e z representam números reais.

$3^3 x^2 y^4 z^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z$

Você pode ver porque é melhor usar os expoentes. Neste próximo exemplo, a base é, na verdade, um binômio. Os parênteses significam que você soma os dois valores antes de aplicar o expoente.

$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$

Comparando com expoentes

É mais fácil comparar quantidades quando você usa expoentes.
Tente comparar dois números:
943.260.000.000.000.000.000.000 e 8.720.000.000.000.000.000.000.000.

O primeiro número pode parecer maior por causa dos três primeiros dígitos, mas isso é errado. Para descobrir o valor real de um número muito grande, observe as instruções a seguir. Escreva usando multiplicação e expoentes:

1. **Escreva o(s) número(s) entre 1 e 10 e multiplique pela potência de dez.**

   Usando os números anteriores, você tem:

   $943.260.000.000.000.000.000.000 =$
   $9{,}4326 \times 100.000.000.000.000.000.000.000$

   e

   $8.720.000.000.000.000.000.000.000 =$
   $8{,}72 \times 1.000.000.000.000.000.000.000.000$

2. **Escreva cada potência de dez em forma de expressão exponencial com o expoente indicando o número de zeros.**

   No exemplo, isso é modificado para

   $943.260.000.000.000.000.000.000 = 9{,}4326 \times 10^{23}$

   $8.720.000.000.000.000.000.000.000 = 8{,}72 \times 10^{24}$

3. **Compare os números.**

   O número com o maior potência de dez é o maior número. Se os expoentes forem os mesmos, compare os números que multiplicam a potência de dez.

   $8{,}72 \times 10^{24} > 9{,}4326 \times 10^{23}$

Por que o número com a maior potência de dez é o número maior? Olhe para estes dois números que são mais simples (eles não têm mais de vinte zeros).



Compare 8×10^2 and 9×10^1. Ou seja, você está comparando $8 \times 100 = 800$ e $9 \times 10 = 90$. Mesmo o 9 sendo maior do que o 8, será a maior potência de dez que sairá vencedora.

Expoentes

Os primeiros expoentes apareceram em meados de 1636 quando a base era escrita em uma linha regular e o expoente era elevado um pouquinho para a direita. Os primeiros expoentes eram expressos em algarismos romanos, ou seja, y ao cubo seria y^{III}. No começo, muitos se opuseram a usar os algarismos e continuaram a escrever y ao cubo como *yyy* . René Descartes preferia não escrever o número dois como expoente. Ele preferia escrever aa que a^2. Isaac Newton foi o primeiro a reconhecer e usar expoentes negativos e em forma de fração.

Entendendo notação científica

Os números muito grandes são usados ao se falar de distâncias entre planetas, do número de grãos de areia ou da quantidade de dinheiro gasta pelo governo. Números muito pequenos são usados para medir as células vegetais e animais, o tamanho dos átomos ou outras coisas bem pequenas. *Notação científica* é a forma padrão de representar esses números, muito grandes e muito pequenos, para que possam caber em uma linha na página de um livro e, assim, possam ser comparados com mais facilidade.



A computação também se torna mais fácil com os números em notação científica.

A fórmula para notação científica é $N \times 10^a$, onde N é um número entre 1 e 10 (mas não pode ser 10), e onde a é um número inteiro (positivo ou negativo).

Você pode escrever números grandes e pequenos em notação científica mudando o ponto decimal (a vírgula) até que a nova forma seja um número de um a dez e depois indicando quantas casas vírgula andou através da potência de dez.



Dependendo de como você mover a vírgula, para a direita ou para a esquerda, a potência de 10 vai ser positiva ou negativa. Movendo a vírgula para a direita, o expoente fica negativo; e movendo para a esquerda, o expoente fica positivo. Os exemplos a seguir mostram como funciona.

- $41.000 = 4{,}1 \times 10^4$

  Ande quatro casas decimais para a esquerda e eleve 10 à quarta potência.

- $312.000.000.000 = 3{,}12 \times 10^{11}$

  A casa decimal andou 11 espaços para a esquerda.

- $0{,}00000031 = 3{,}1 \times 10^{-7}$

  Desta vez, a casa decimal andou 7 espaços para a *direita*. Esse é um número muito *pequeno*, então, o expoente é negativo.

- $0{,}2 = 2 \times 10^{-1}$

  A casa decimal andou um espaço para a direita.

Explorando Expressões Exponenciais

É muito fácil lidar com números muito grandes ou muito pequenos quando usamos expressões exponenciais! Isso também é verdade quando analisamos situações que envolvem repetir a mesma coisa várias e várias vezes.

Imagine um gato atrás de um rato. Eles estão a 20 metros um do outro. Cada vez que o rato morde pedacinhos de queijo, o gato se aproveita

da distração do rato e se aproxima em um décimo. O gato quer ficar a apenas 1 metro de distância – perto o bastante para atacar. Qual a distância entre eles depois de 4 passos? E após 10 passos? Quanto tempo levará para que o gato ataque o rato?

Use esses passos para caçar o seu próprio rato (ou para calcular qualquer distância que diminui).

1. **Expresse o deslocamento em forma de fração.**

   No problema acima é fácil porque o gato se aproxima em um décimo.

2. **Multiplique a distância total pela fração para descobrir o tamanho do deslocamento.**

   O gato e o rato estão a 20 metros de distância, então você multiplica 20 vezes $\frac{1}{10}$ para chegar a 2 metros.

3. **Subtraia o comprimento do deslocamento pela distância atual.**

   20 metros menos 2 metros é igual a 18 metros entre eles.

4. **Multiplique a distância atual pela fração para descobrir a distância do segundo deslocamento.**

   Segundo deslocamento: multiplique 18 vezes $\frac{1}{10}$ para chegar a 1,80 metro.

5. **Subtraia o comprimento do deslocamento da distância atual.**

   18 metros menos 1,80 metro é igual a 16,20 metros entre eles.

6. **Multiplique a distância atual pela fração para descobrir a distância do terceiro deslocamento.**

   Terceiro deslocamento: multiplique 16,20 vezes $\frac{1}{10}$ para chegar a 1,62 metro.

7. **Subtraia o comprimento do deslocamento da distância atual.**

   16,20 metros menos 1,62 metros = 14,58 metros entre eles.

E assim por diante e etc. e tal (você não está feliz pelo gato não estar a 200 metros de distância?).

De qualquer forma, existe uma maneira mais fácil para se obter esse resultado. Ao invés de, toda vez, achar um décimo da distância que resta e subtrair, alterne para achar a distância que resta entre eles, que é nove décimos da distância antes do movimento. Um décimo mais nove décimos é igual a um – o valor total.

Em cada passo você multiplica por $\frac{9}{10}$ - a fração da distância que sobra depois do deslocamento vezes a distância atual. Nove décimos vezes a distância atual = nova distância. Então só teremos uma operação para lidar de cada vez.

1. Ache a distância remanescente entre eles depois do primeiro movimento multiplicando a distância atual por $\frac{9}{10}$.

   $\frac{9}{10}$ de 100 = $\frac{9}{10} \times 100$ = 90 metros entre eles.

2. Ache a distância remanescente entre eles depois do segundo movimento multiplicando a distância atual por $\frac{9}{10}$.

$\frac{9}{10}$ de 90 = $\frac{9}{10} \times 90 = 81$ metros entre eles.

3. Ache a distância remanescente entre eles depois do terceiro movimento multiplicando a distância atual por $\frac{9}{10}$.

$\frac{9}{10}$ de 81 = $\frac{9}{10} \times 81 = 72.9$ metros entre eles.

4. Ache a distância remanescente entre eles depois do quarto movimento multiplicando a distância atual por $\frac{9}{10}$.

$\frac{9}{10}$ de 72.9 = $\frac{9}{10} \times 72.9 = 65.61$ metros entre eles.

Como você pode observar, isso parece igualmente entediante. A melhor maneira de achar a resposta é usando os expoentes. Resolver este problema usando potências, ou expoentes, pode tornar a resolução bem mais fácil. Esta terceira sugestão é o charme para achar a distância entre o gato e o rato. É só seguir esses passos:

Distância para o ataque = $100\left(\frac{9}{10}\right)^n$, onde n é o número de movimentos que o gato fez.



Faça primeiramente as operações de dentro do sinal de agrupamento.

Nesta fórmula, devido ao fato da fração $\frac{9}{10}$ estar dentro dos parênteses, você deve, em primeiro lugar, colocar o expoente do lado de fora dos parênteses da fração. Multiplique a fração por n vezes ela mesma antes de multiplicar por 100.

- Ache a distância entre o gato e o rato usando a fórmula apresentada. Depois do terceiro movimento a distância entre eles será $100\left(\frac{9}{10}\right)^3 = 72.9$ metros

  Depois do décimo movimento a distância entre eles será $100\left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 34.87$ metros. Ainda não é perto o suficiente para atacar. Eu estou usando o símbolo de aproximado – $\approx$ – porque a resposta atual tem muito mais casas decimais e você não precisa dessa informação.

  Depois de vinte e oito movimentos a distância entre eles será $100\left(\frac{9}{10}\right)^{26} \approx 6.46$ metros

Vai ser preciso mais um movimento para que o gato fique a menos de um metro de distância para atacar. Será que o rato ainda não percebeu a situação depois de 28 movimentos? Se não, ele merece ser atacado!

Outros exemplos rápidos:

- Achar a população de uma cidade que tem 5% de crescimento ao ano e que, em 1990, tinha 10.000 habitantes.

  População = $10.000(1{,}05)^n$. O n será o número de anos a partir de 1990.

Em 1995 $n = 5$, então a população é $= 10.000(1{,}05)^5 \approx 12.763$.

Arredonde para um número inteiro e use o sinal de aproximadamente igual para que não fique um "pedaço" de uma pessoa na resposta.

- Você quer achar a distância total (para cima e para baixo, para cima e para baixo, para cima...) que uma bola faz em n quiques. Sabendo que a bola quica 75% da distância da qual é largada e que você vai largá-la de uma janela a 20 metros de altura sobre uma calçada lisa, a equação que você precisa é:

  $$\text{Distância} = 40 + 240\left[1 - 0{,}75^n\right].$$

  n será o número de quiques. Então, a distância total pode ser achada por esta fórmula.

  Após um quique, e antes do segundo, a distância total é 20 metros + 15 metros + 15 metros = 50 metros

  Cheque isso com a fórmula:

  $$\text{Distância} = 20 + 240\left[1 - 0{,}75^1\right] = 50 \text{ metros.}$$

  Depois de dez quiques, a distância total é 20 metros + 15 metros + 15 metros + 11,25 metros + ... UGH! Use a fórmula!

  $$\text{Distância} = 20 + 240\left[1 - 0{,}75^{10}\right] \approx 133{,}24 \text{ metros.}$$

Aqui você tem somente a fórmula com todos os passos básicos necessários para resolver o problema, e você pode ver como é possível resolver problemas desse tipo. Talvez você só precise de mais informação sobre seqüência e progressão para montá-lo, mas a parte algébrica você pode fazer sozinho. Olhe o site da *Bouncing Ball* no link http:/hilltop.bradley.edu/%7Esterling/facinfo.html para mais ajuda.

Multiplicando expoentes

Você pode multiplicar muitas expressões exponenciais juntas sem ter que transformar suas formas nos números grandes e pequenos que representam. A única exigência é que as bases das expressões exponenciais sejam iguais. A resposta será, então, uma bonita expressão exponencial.



x^n: x é a base e pode ser qualquer número real; n é a potência ou expoente e também pode ser qualquer número real. Para multiplicar dois desses tipos de números juntos, as bases devem ser de mesmo valor. Então, você pode multiplicar $2^4 \cdot 2^6$ e $a^6 \cdot a^8$, mas você ***não pode*** multiplicar $3^5 \cdot 4^5$ porque as bases não são iguais (ainda que os expoentes sejam).



Para multiplicar potências de mesma base, some os expoentes:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}.$$

Veja estes exemplos:

- $2^4 \cdot 2^9 = 2^{4+9} = 2^{13}$
- $a^5 \cdot a^8 = a^{13}$
- $4^a \cdot 4^2 = 4^{a+2}$

Se numa expressão com expoentes houver mais de uma base, você pode combinar os números de bases iguais, achar os valores e depois escrever todos eles juntos, como mostra o exemplo a seguir:

- $3^2 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 2^4 = 3^{2+3} \cdot 2^{2+4} = 3^5 \cdot 2^6$
- $4x^6 y^5 x^4 y = 4x^{6+4} y^{5+1} = 4x^{10} y^6$



Quando um expoente não é mostrado, como em y, você considera que o expoente é 1, então, no exemplo, escreva y^1.

Dividindo e conquistando

Você pode dividir expressões exponenciais deixando as respostas na forma de expressões exponenciais, desde que as bases sejam iguais. A divisão é o oposto da multiplicação, então faz sentido, ao dividir números de mesma base, subtrair os expoentes ao invés de somá-los como fazemos na multiplicação.



Para dividir potências de mesma base subtraia os expoentes: $x^a \div x^b = x^{a-b}$ onde x pode ser qualquer número real, exceto o zero. Você não pode dividir por zero.

Os exemplos mostram como a regra da divisão funciona:

- $2^{10} \div 2^4 = 2^{10-4} = 2^6$

  Esses expoentes representam o problema $1.024 \div 16 = 64$. É muito melhor deixá-los na forma de expoentes.

- $\frac{4x^6 y^3 z^2}{2x^4 y^3 z} = 2x^{6-4} y^{3-3} z^{2-1} = 2x^2 y^0 z^1 = 2x^2 z$:

  As variáveis representam os números, então se escrevemos na forma extensa temos:

  $\frac{2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z}{2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z}$.

  Cortando os fatores iguais o que resta é $2x^2z$. Preciso dizer algo mais?

O que representa o expoente 0 no y? Continue lendo.

Testando a Potência do Zero

Se x^3 significa $x{\cdot}x{\cdot}x$, o que x^0 significa? Bem, isso não quer dizer x vezes zero, então a resposta não é zero. x representa um número real desconhecido, mas não pode ser zero. Para entender como isto funciona, use a regra da divisão para expressões exponenciais envolvendo o zero, que verá a seguir:



Qualquer número elevado a zero é igual a um, desde que a base não seja zero.

Por exemplo, para dividir $2^4 \div 2^4$ use a regra para dividir expressões exponenciais. Essa regra diz que se as bases são iguais, subtraia os dois expoentes na ordem em que são dados. Fazendo isso, você acha a resposta que é $2^{4-4} = 2^0$. Mas $2^4 = 16$, então $2^4 \div 2^4 = 16 \div 16 = 1$. O que significa que $2^0 = 1$. Isto é verdade para todos os números que podem ser escritos como problemas de divisão, o que significa dizer que é verdade também para todos os números com exceção daqueles com a base zero.

Veja como o expoente zero funciona:

- $m^2 \div m^2 = m^{2-2} = m^0 = 1$
- $4x^3y^4z^7 \div 2x^3y^3z^7 = 2x^{3-3}y^{4-3}z^{7-7} = 2x^0y^1z^0 = 2y$
- $\dfrac{(2x^2+3x)^4}{(2x^2+3x)^4} = (2x^2+3x)^{4-4} = (2x^2+3x)^0 = 1$

Note que x e z, com seus expoentes zero, se tornam um. E quando você multiplica por um, o valor não muda.

Trabalhando com expoentes negativos

Os expoentes negativos são uma ótima invenção. Eles têm um significado muito específico e devem ser manejados com cuidado. Mesmo assim, eles são muito convenientes para resolver algumas questões.

Você pode usar um expoente negativo para escrever uma fração sem realmente escrevê-la! É uma maneira de combinar expressões com a mesma base, onde os fatores diferentes estão no numerador ou no denominador. É uma forma de transformar problemas de divisão em problemas de multiplicação.



Calculando Juros

Antigamente, perdia-se muito tempo calculando empréstimos e investimentos. Na Mesopotâmia, banqueiros usavam tabelas exponenciais para determinar quanto tempo levaria para o dinheiro duplicar a uma taxa de juros de 20% ao ano. Não seria legal achar um bom banco mesopotâmico para depositar as suas economias? Por outro lado, eu não gostaria de pegar um empréstimo!

Os expoentes negativos são a forma de escrever as potências de frações ou de decimais sem usar a fração ou o decimal. Por exemplo, ao invés de escrever $\left(\frac{1}{10}\right)^{14}$, você pode escrever 10^{-14}.



O recíproco, ou simplesmente o inverso, de um número é o inverso multiplicativo do número. O produto de um número pelo seu inverso é igual a um.



O inverso de x^a é $\frac{1}{x^a}$, que pode ser escrito comox^{-a}. A variável x é qualquer número real, exceto o zero. E a é qualquer número real. Indo para o lado negativo, $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$.

Os exemplos a seguir mostram como mudar os expoentes positivos para negativos e vice-versa.

- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
  O inverso de 2^3 é $\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$.
- $z^{-4} = \frac{1}{z^4}$
  O inverso de z^4 é $\frac{1}{z^4} = z^{-4}$.
- $6^{-1} = \frac{1}{6}$
  O inverso de 6 é $\frac{1}{6} = 6^{-1}$.

Mas e se você começar com um expoente negativo no denominador? O que acontecerá então? O inverso de $\frac{1}{3^{-4}} = 3^4$. Você chega um expoente negativo porque $\frac{1}{3^4} = 3^{-4}$. Então, o inverso de $\frac{1}{3^{-4}} = 3^4$.

Então o expoente negativo do denominador vai para o numerador e o sinal do expoente é mudado (neste caso, para o positivo). Aqui estão mais dois exemplos:

- $\frac{x^2 y^3}{3z^{-4}} = \frac{x^2 y^3 z^4}{3}$
- $\frac{4a^3 b^5 c^6 d}{a^{-1} b^{-2}} = 4a^3 a^1 b^5 b^2 c^6 d = 4a^4 b^7 c^6 d$

Potência das potências

Devido ao fato dos expoentes serem símbolos para multiplicações repetidas, uma forma de escrever $(x^3)^6$ is $x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3$. Usando a regra da multiplicação, onde você apenas soma todos os expoentes, você acha $x^{3+3+3+3+3+3} = x^{18}$. Não seria melhor se a regra para elevar uma potência à outra potência fosse só multiplicar os dois expoentes? Pois então, que sorte a sua!



Elevando uma potência a outra potência: $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$. Quando toda a expressão x^n é elevada potência m, a nova potência de x é determinada multiplicando-se n e m juntos.

Estes exemplos mostram a você como funciona a potência de outra potência.

- $\left(6^{-3}\right)^4 = 6^{-3 \cdot 4} = 6^{-12} = \frac{1}{6^{12}}$
- $(3^2)^{-5} = 3^{2(-5)} = 3^{-10} = \frac{1}{3^{10}}$
- $(x^{-2})^{-3} = x^{(-2)(-3)} = x^6$
- $(3x^2y^3)^2 = 3^2x^{2\cdot 2}y^{3\cdot 2} = 9x^4y^6$

  (Cada fator dentro dos parênteses é elevado à potência de fora dos parênteses).
- $(3x^{-2}y)^2(2xy^{-3})^4 = (3^2x^{-2\cdot 2}y^{1\cdot 2})(2^4x^{1\cdot 4}y^{-3\cdot 4}) = \left(9x^{-4}y^2\right)\left(16x^4y^{-12}\right)$
  $= 144x^0y^{-10} = \frac{144}{y^{10}}$

Note que a ordem das operações é observada aqui. Primeiro você eleva as expressões nos parênteses à potência, depois multiplica as duas expressões. Você pode ver expoentes multiplicativos (elevando uma potência à outra potência) e expoentes aditivos (multiplicando as mesmas bases). Agora temos um exemplo com expoentes negativos.

$$(x^2y^3)^{-2}(x^{-2}y^{-3})^{-4} = (x^{2(-2)}\ y^{3(-2)})(x^{(-2)(-4)}\ y^{(-3)(-4)})$$
$$= (x^{-4}y^{-6})(x^8y^{12}) = x^{-4+8}y^{-6+12} = x^4y^6$$

Preparando-se para as raízes quadradas

Quando você faz raiz quadrada, o símbolo da operação é o radical $\sqrt{\ }$. O radical é uma operação não binária (envolve apenas um número) que pergunta a você "Qual número multiplicado por ele mesmo te dá o número dentro do radical?". Outra maneira de dizer isso é: se $\sqrt{a} = b$, *então* $b^2 = a$.

Achar raízes quadradas é uma operação algébrica relativamente comum, mas trabalhar com elas e combiná-las nem sempre é muito fácil.



Expressões com radicais podem ser multiplicadas e divididas desde que o índice *ou* valor dos radicais sejam iguais. Expressões com radicais não podem ser somadas ou subtraídas a não ser que *ambos*, os índices dos radicais e o radicando, sejam iguais.

Aqui estão alguns exemplos que mostram o que estou dizendo.

- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

  Esses *não podem* ser combinados porque é uma soma e os valores de dentro dos radicais não são os mesmos.
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

Esses *podem* ser combinados porque é uma multiplicação e o índice dos radicais é o mesmo.

- $\sqrt{8} \div \sqrt{4} = \sqrt{2}$

  Esses *podem* ser combinados porque é uma divisão e o índice dos radicais é o mesmo.

- $\sqrt{3} - \sqrt[4]{3}$

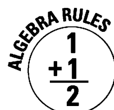
  Esses *não podem* ser combinados porque é uma subtração e o índice dos radicais não é o mesmo.

- $4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

  Esses *podem* ser combinados porque o índice dos radicais e os números dentro do radical são os mesmos.

Quando os números de dentro do radical são os mesmos, você pode ver algumas combinações bem legais envolvendo adição e subtração. Multiplicação e divisão podem ser efetuadas, não importa se os números de dentro do radical são iguais ou diferentes. O radical se refere à raiz quadrada, $\sqrt{\ }$, a raiz cúbica, $\sqrt[3]{\ }$, raiz quarta, $\sqrt[4]{\ }$ e assim sucessivamente.

As regras para somar, subtrair, multiplicar e dividir expressões com radicais são resumidas a seguir.



Regras para os radicais: considere que a e b são valores positivos.

- $m\sqrt{a} + n\sqrt{a} = (m+n)\sqrt{a}$

  Adição e subtração podem ser efetuadas se o índice dos radicais e o valor do número dentro do radical são iguais.

- $m\sqrt{a} - n\sqrt{a} = (m-n)\sqrt{a}$
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

  Multiplicação e divisão podem ser efetuadas se os índices dos radicais forem iguais.

- $\sqrt{a} / \sqrt{b} = \sqrt{a/b}$

Tabela 4-1 mostra algumas das raízes quadradas mais comuns.

Tabela 4-1 Raízes quadradas mais comuns

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$
$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$
$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{10,000} = 100$	$\sqrt{1,000,000} = 1,000$



Note que a raiz quadrada de 1 seguido por um número ímpar de zeros é sempre 1 seguido pela metade desses zeros.

A convenção que os matemáticos adotaram foi usar frações nas potências para representar um radical ou raiz.

- $\sqrt{x} = x^{1/2}$
- $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$
- $\sqrt[4]{x} = x^{1/4}$
- $\sqrt{4ab} = (4ab)^{1/2} = (4)^{1/2} a^{1/2} b^{1/2} = 2a^{1/2} b^{1/2}$
- $\sqrt[3]{x^2 y} = (x^2)^{1/3} y^{1/3} = x^{2/3} y^{1/3}$



Quando não há nenhum número do lado de fora e na parte superior esquerda do radical você considera como sendo o número 2.

Lembre-se que quando eleva uma potência à outra potência, você multiplica os expoentes. Isto é discutido no tópico "Potência das potências", que vimos há pouco, neste capítulo.



Ao mudar de radical para expoente fracionário:

- $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

  O índice n de a pode ser escrito na forma de expoente fracionário com a elevado ao recíproco do índice.
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

  Quando a raiz de a^m é retirada, a é elevado à potência $\frac{1}{n}$. Usando a regra para a "Potência das potências" o m e o $\frac{1}{n}$ são multiplicados.

Esta regra possibilita que você simplifique as expressões que mostro a seguir (note que ao usar a regra para a "Potência das potências", as bases ainda devem ser as mesmas).

- $6x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 6x^2 \cdot x^{1/3} = 6x^{2+1/3} = 6x^{7/3}$
- $3\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot x = 3x^{1/2} \cdot x^{3/4} \cdot x^1 = 3x^{9/4}$

  Deixe o expoente na forma $\frac{9}{4}$, não escreva em forma de número misto.
- $4\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{a} = 4x^{1/2} a^{1/3}$

  Estes não podem ser combinados porque as bases não são iguais.

Confira as regras na "Folha de Consulta" para você não se confundir.

Capítulo 5

Fazendo operações em ordem e verificando suas respostas

Neste capítulo:

- Organizando suas operações em pedaços pequenos
- Ordenando a resolução do seu problema do começo ao fim
- Conferindo se suas respostas fazem sentido
- Escrevendo suas respostas corretamente

A álgebra começou com expressões que eram apenas palavras, tudo era literalmente soletrado. Na medida em que símbolos e letras foram aos poucos inseridos na álgebra, as regras que acompanhavam os símbolos também se tornaram parte dela. Todas essas formas abreviadas são maravilhosas, desde que você saiba as regras e siga os passos que vêm com elas. A *ordem das operações* é algo importante e que você usa freqüentemente. Ela te diz o que fazer primeiro, em seguida, e no final de um problema, quando os termos estão em sinais de agrupamento ou elevados a alguma potência.

Devido ao fato de você nem sempre se lembrar da ordem correta das operações, é muito importante verificar cuidadosamente seu trabalho. Ter certeza de que a resposta que você achou faz sentido e que ela realmente soluciona o problema, é o último passo na resolução de qualquer problema. Mas a principal finalização está, de fato, em escrever a solução de maneira que as pessoas possam compreender facilmente.

Este capítulo leva você através da ordem das operações, verificando suas repostas e escrevendo-as corretamente.

Ordenando operações

Quando é que a *ordem* das coisas realmente importa? Ou será que ela não é importante de maneira nenhuma?

- Quando você está fazendo faxina na casa *não* importa se você limpa primeiro a cozinha ou a sala de estar.

- Quando você está se vestindo *vai* importar se você coloca seu sapato ou sua meia primeiro.

Algumas vezes a ordem é importante e outras vezes não. Mas a ordem em que as *diferentes* operações matemáticas são feitas é importante. Se você estiver apenas adicionando ou multiplicando, você pode usar a ordem que quiser. Porém, na hora em que você mistura operações diferentes na mesma expressão, você tem que prestar muita atenção na ordem correta. Você não pode simplesmente escolher o que fazer primeiro, em seguida e no final somente a partir da sua própria vontade.

Por exemplo, veja como este problema poderia ser feito se não houvesse regras. Note que todas as quatro operações estão aqui representadas.

Resolva: $8 - 3 \times 4 + 6 \div 2 =$

Uma maneira de resolver o problema é simplesmente ir da esquerda para a direita:

1. $8 - 3 = 5$
2. $5 \times 4 = 20$
3. $20 + 6 = 26$
4. $26 \div 2 = 13$

Dando uma reposta final igual a 13.

Outro método é agrupar o 3×4. Lembre-se: termos agrupados dizem que você tem que fazer primeiro a operação que está dentro do sinal de agrupamento.

1. $8 - (3 \times 4) = 8 - 12 = -4$
2. $-4 + 6 = 2$
3. $2 \div 2 = 1$

Dando uma resposta final igual a 1.

Usando outros agrupamentos você pode obter as repostas 25, 60 e até zero. Eu não vou especificar como essas repostas são obtidas porque, de qualquer forma, todas elas estão erradas.

Matemáticos criaram regras para que qualquer pessoa que lesse um problema matemático pudesse resolvê-lo da mesma maneira e achasse a mesma resposta. No caso de vários sinais e operações, os problemas devem ser calculados em uma *ordem* especificada, da primeira até a última. Esta é a *ordem das operações*.



Ordem das operações: resolva as operações e os sinais na seguinte ordem:

1. **Potências ou raízes**
2. **Multiplicação ou divisão**
3. **Adição ou subtração**



Computando as diferenças dos sinais de agrupamento

Em problemas algébricos, parênteses, colchetes e chaves são usados para agrupamento. Os termos dentro dos sinais de agrupamento devem ser resolvidos antes de se misturarem aos termos de fora dos sinais de agrupamento. Todos os sinais têm peso igual, nenhum é mais importante e nem age diferente do outro. Isto não é levado à risca em muitas calculadoras gráficas. Os colchetes e as chaves significam algo totalmente diferente nesses instrumentos. Na maioria das calculadoras gráficas a significação é a seguinte:

- **Colchetes** – Significam que os itens dentro deles são parte de uma matriz, um arranjo retangular de números.
- **Chaves** – Informam que o que está dentro é parte de uma lista de números.

Essas diferenças resultam em algumas situações constrangedoras quando você quer usar muitos agrupamentos dentro de uma única expressão. Devido ao fato de você estar limitado aos parênteses, e todos eles são do mesmo tamanho, sempre há confusão sobre onde o agrupamento começa e onde termina.

Quando você tem duas operações do mesmo "nível", você pode fazê-las em qualquer ordem. Então, se houver uma potência e uma raiz, qualquer uma pode ser feita primeiro. Se você tem mais de duas operações, faça-as da esquerda para a direita, seguindo a ordem das operações.



Se o problema tiver itens agrupados, faça primeiro o que está dentro do sinal de agrupamento, depois siga a ordem das operações. Os sinais de agrupamento são:

- **Parênteses ( ):** são os sinais mais usados para agrupamento.
- **Colchetes [ ] e Chaves { }:** são freqüentemente usados para agrupamento e têm o mesmo efeito dos parênteses. Usar os diferentes tipos de sinais ajuda quando há mais de um agrupamento no problema. É mais fácil dizer onde o agrupamento começa e onde termina.
- **Radical $\sqrt{}$:** é usado para achar a raiz.
- **Sinal de fração ——:** o sinal de fração também funciona como um sinal de agrupamento: tudo acima da linha – no numerador – está agrupado junto e tudo abaixo da linha – no denominador – também está agrupado junto.

Mesmo que as regras para a ordem das operações e para os sinais de agrupamento sejam bastante objetivas, é difícil prever todas as situações que possam surgir nos problemas. No entanto, os exemplos deste capítulo devem responder a qualquer pergunta que você tenha sobre o assunto.

O problema a seguir não tem parênteses ou colchetes para indicar qual operação deve ser feita primeiro, mas a regra para a ordem das operações

(citada anteriormente neste tópico) diz que multiplicação e divisão precisam ser resolvidas antes da adição e da subtração. Por exemplo, para achar a resposta de $8 - 3 \times 4 + 6 \div 2 = ?$, siga esses passos:

1. Multiplique o 3×4 e divida o $6 \div 2$ para achar 12 e 3.

   Os parênteses ajudam a enfatizar o que fazer primeiro.

   $8 - (3 \times 4) + (6 \div 2) = 8 - 12 + 3$

2. Some e subtraia da esquerda para a direita.

   $8 - 12 + 3 = -1$

   $8 - 3 \times 4 + 6 \div 2 = -1$

Neste exemplo, as operações estão agrupadas para ajudar você.

$$\left[8 \div (5 - 3)\right] \times 5 =$$

1. Subtraia o $5 - 3$ nos parênteses para achar 2.
2. Divida 8 por 2 e multiplique a resposta por 5.

   $[8 \div 2] \times 5 =$

3. Multiplique 4 vezes 5.

   $[8 \div 2] \times 5 = 4 \times 5 = 20$

Não deixe que a divisão no próximo problema te desanime. É fácil!

Para resolver $\dfrac{4(7+5)}{2+1}$

1. Some 7 e 5 no numerador, depois o 2 e o 1 no denominador.

   $\dfrac{4(12)}{3}$



   Lembre-se que o sinal de fração é um sinal de agrupamento. O 2 e o 1 no denominador são agrupados juntos e devem ser somados primeiro e antes de você dividir a soma no numerador.

2. Multiplique e divida para achar

   $\dfrac{4(12)}{3} = \dfrac{48}{3} = 16$

Embora qualquer operação dentro dos parênteses ou chaves tenha prioridade, expoentes e raízes devem ser resolvidos primeiro, de acordo com a ordem das operações. Agora você pode resolver um problema com expoentes.

$$2 + 3^2(5 - 1) =$$

1. Subtraia o 1 de 5 nos parênteses para achar 4.

   $2 + 3^2(4)$

2. Eleve o 3 a segunda potência para ter 9.

   $2+9(4)$

3. Multiplique o 9 pelo 4 para ter 36.

   $2+9(4)=2+36$

4. Calcule a resposta final.

   $2+36=38$

Tente esse problema envolvendo raiz quadrada. Lembre-se de fazer primeiro qualquer operação nos parênteses ou colchetes.

$(3+4)\sqrt{25}-8$

1. Some 3 + 4

   $7\sqrt{25}-8$

2. Ache a raiz quadrada de 25 (olhe a folha de consulta no começo do livro para uma lista de raízes quadradas).

   $7\cdot 5-8$

3. Multiplique o 7 e o 5.

   $35-8$

4. Resolva o problema.

   Visto que $35-8=27$, então $(3+4)\sqrt{25}-8=27$.



Preste muita atenção para perceber a sutil diferença entre essas duas operações: -2^4 e $(-2)^4$. A expressão $-2^4=-16$, porque a ordem das operações diz para primeiro elevar a quarta potência e depois aplicar o sinal de menos.

A expressão $(-2)^4=16$, porque todo o resultado dos parênteses é elevado à quarta potência. Isto equivale a multiplicar -2 por ele mesmo quatro vezes. É um número par de números negativos, então o resultado é positivo.



Projetando as grandes pirâmides

Os egípcios eram muito eficientes em geometria e desenvolveram fórmulas rudimentares para descobrir o volume de muitas figuras sólidas. Eles colocaram esses conhecimentos em prática ao construir as pirâmides, que não são apenas maravilhas arquitetônicas, mas também grandes obras matemáticas. Com ferramentas primitivas, como manivelas e fios de prumo, os egípcios cortaram pedras que variavam, em média, por $\frac{1}{100}$ de milímetro, e elas foram colocadas lado a lado com espaçamentos menores que $\frac{1}{500}$ de milímetro. A grande Pirâmide de Quéops tem lados que olham diretamente para o norte, sul, leste e oeste, com precisão de $\frac{1}{12}$ de grau.

Em geral, se você quer um número negativo elevado a uma potência, você tem que colocar parênteses com a potência do lado de fora.

Verificando suas respostas

Verificar suas respostar ao trabalhar com álgebra é sempre uma boa idéia, assim como comparar o seu talão de cheques com o extrato da sua conta bancária também é uma ótima idéia. Na verdade, verificar suas respostas, em álgebra, é mais fácil e mais divertido do que checar sua conta bancária. Ou, talvez a sua conta corrente seja melhor do que a minha.

Em álgebra, verifique suas repostas em dois níveis.

- **Nível 1:** A resposta faz sentido?
  Se o saldo do seu talão de cheques mostra $40 milhões, isso faz sentido? É claro que todos nós gostaríamos que fizesse sentido, mas para a maioria de nós isto seria um sinal de que alguma coisa está errada com os nossos cálculos.

- **Nível 2:** Colocando a resposta de volta no problema te dá uma afirmação verdadeira? *Funciona?*
  Este é a verificação mais crítica porque te dá a informação mais exata sobre sua resposta. O primeiro nível ajuda a eliminar os erros óbvios. Esta é a verificação final.

O próximo tópico ajudará a entender melhor os níveis.

Fazendo sentido no nível 1

Para verificar se uma resposta faz sentido ou não, você tem que saber alguma coisa sobre o assunto. Essas situações devem envolver coisas com as quais você se familiariza. Apenas use seu bom senso.

Por exemplo, sua resposta para um problema algébrico é $x = 5$. Se você está tentando achar o peso de Jon em quilos, a não ser que ele seja um porquinho-da-índia ao invés de uma pessoa, você provavelmente tem que voltar e refazer os cálculos. Neste contexto, cinco quilos não fazem sentido como resposta.

Por outro lado, se o problema envolver um número de centavos no bolso de alguém, então cinco centavos parece razoável. Achar cinco como o número de gols que um jogador de futebol fez em um jogo pode, à primeira vista, ser possível, mas quando você pensa melhor, cinco gols em um único jogo é muito – mesmo para Pelé ou Romário. Você deve checar novamente.

Apresentando o nível 2

Inserir sua resposta requer, na prática, que você passe pelas operações algébricas no problema. Você soma, diminui, multiplica e divide para ver se você consegue uma afirmação verdadeira usando a sua resposta.

Por exemplo, suponha que Jack tenha quatro centavos a mais do que Jill. Se juntos eles têm um total de 14 centavos, então quantos centavos Jill tem? $x = 5$ funciona como resposta?

1. **Escreva o problema**

   Permita que x represente o número de centavos que Jill tem. Jack tem $x + 4$ centavos. O que significa que $x + (x + 4) = 14$.

   O número de centavos que Jill tem mais o número de centavos que Jack tem somam um total de 14 centavos.

2. **Insira a resposta na equação.**

   Substitua a variável por 5 para ter $5 + (5 + 4) = 14$

3. **Faça as operações e verifique se a resposta funciona.**

   $5 + 9 = 14$ é uma afirmação verdadeira, então o problema está certo. Jill tem 5 centavos, Jack tem 4 centavos a mais que Jill, ou 9 centavos; juntos eles têm 14 centavos.

Você pode aplicar uma variação dos passos anteriores para verificar se $x = 2$ funciona na seguinte equação

$$5x[x + 3(x^2 - 3)] + 1 = 0$$

Substitua a variável por 2 para ter $5 \cdot 2[2 + 3(2^2 - 3)] + 1 = 0$

Faça as operações e simplifique:

Eleve 2 ao quadrado para chegar a $5 \cdot 2[2 + 3(4 - 3)] + 1 = 0$

Subtraia os fatores dos parênteses $5 \cdot 2[2 + 3(1)] + 1 = 0$

Some os fatores dos colchetes $5 \cdot 2[5] + 1 = 0$

Multiplique o 5, 2 e o 5 $50 + 1 \neq 0$

Desta vez o problema não confere. Você deve voltar e tentar de novo para achar o valor para x que funcione.

Escrevendo respostas compreensíveis

Uma expressão algébrica pode ser escrita de diversas maneiras. Estas formas diferentes de escrita podem até estar *corretas,* mas, no entanto, podem não ser legais, bonitas ou úteis. Sim, a álgebra pode ser bonita, e neste tópico eu te mostro como.

Olhe para três versões de uma mesma reposta para uma pergunta. Qual você prefere?

A) $3adce - becd4 + aed5b - 2$

B) $3acde - 4bcde + 5abde - 2$

C) $ed3ac - b4edc - 2 + 5bade$

Qual é a sua resposta? Alguma reposta é mais bonita e fácil de ler? (Eu escolho a letra b). Seguindo algumas convenções matemáticas, você pode tornar sua anotação uniforme, compreensível e mais fácil de comparar com outras expressões algébricas.



Em qualquer termo, coloque primeiro os números e depois coloque as variáveis em ordem alfabética. Coloque os radicais no final.

Para colocar *ed3ac* na forma padrão, escreva o número primeiro, depois coloque as variáveis em ordem alfabética: $3acde$.

Ao organizar uma seqüência de termos, pegue todos os termos contendo a mesma variável e coloque-os em ordem crescente ou decrescente de potências da variável. Por exemplo, para colocar termos em ordem decrescente de potências, ache o termo que tem a maior potência e coloque-o primeiro. Depois ache a segunda maior potência e coloque em segundo, e assim por diante. A escolha da variável, e se vai ser crescente ou decrescente depende da situação e do que você pretende fazer depois. Se o problema envolve achar o valor para a variável x e tem muitas potências de x, escreva os termos em ordem de potência de x – não importa se a ordem é crescente ou decrescente.

Para ilustrar, veja os exemplos a seguir. Cada termo individual está escrito na forma correta, mas os termos precisam ser colocados em alguma ordem.

- Opção 1 é em ordem crescente de potências de x. Note que a menor potência de x vem primeiro.

  $$3xy^2 + 8x^2y^3 - 4x^3y$$

- A segunda opção é em ordem decrescente de potências de x.. Agora, a maior potência de x. vem primeiro.

  $$-4x^3y + 8x^2y^3 + 3xy^2$$

- Você pode trocar de variáveis e escrever os termos em ordem crescente de potências de y.

  $$-4x^3y + 3xy^2 + 8x^2y^3$$

- Continue com y, mas escreva os termos em ordem decrescente de potências de y.

  $$8x^2y^3 + 3xy^2 - 4x^3y$$

Usar essas convenções torna suas anotações mais compreensíveis para as pessoas que vierem a ler seu trabalho.

Capítulo 6

Preparando-se para operações

Neste capítulo:

- Expressando-se de forma algébrica
- Operando com suposições
- Aumentando e diminuindo em julgamento
- Multiplicando e dividindo coeficientes e variáveis

O trabalho em álgebra é feito usando variáveis (letras) e símbolos (veja mais sobre variáveis e símbolos no Capítulo 1). Estes são como notações abreviadas – mais rápidos e fáceis de escrever do que todas as palavras escritas. Mas, ao lidar com abreviações, você precisa que saber o que cada uma delas significa e como elas funcionam juntas. Em álgebra, regras simples da aritmética são transformadas em regras para adição, subtração, multiplicação e divisão de variáveis. Permitir que variáveis representem números requer mais flexibilidade, mas tome cuidado – tudo é camuflado.

Percebendo algumas restrições

Quando usamos, em álgebra, variáveis para representar números que podem ser somados, subtraídos, multiplicados e divididos, o que se supõe é que essas variáveis estejam representando *quantidades* ou *quantias* que podem ser somadas, subtraídas, multiplicadas e divididas. No entanto, usar a representação não é tão simples e óbvio. Restrições existem até mesmo quando você está apenas somando números! Da mesma forma, há restrições e regras para adicionar variáveis ou números e variáveis ao mesmo tempo.

Espere um minuto! Quais são as *restrições* que existem para apenas somar os *números*? Porque haveria algum problema com isso? Um mais um não continua igual a dois? Claro, a não ser que seja igual a quatro. É sério. Considere o que acontece quando você soma seis moedas de 25 centavos com quatro moedas de 10 centavos? Quando você *soma* números o que você ganha (além de não ter dinheiro suficiente para comprar o almoço)?

Dez moedas de 25 centavos? Dez moedas de 10 centavos? Não. É claro que isto é besteira. Mas ilustra o que quero dizer sobre restrições ao adicionar números. Se você quer somar moedas de 25 centavos com moedas de 10 centavos, conte o número de moedas e diga que você tem dez *moedas*, ou mude para o valor do dinheiro de cada moeda e diga que você tem R$1,90. Ao adicionar quantidades ou quantias, você tem que ter certeza de que as elas *podem* ser somadas. Isto é mais crítico do que quando você soma letras porque pequenos erros não são tão óbvios. Deve-se ter cuidado para somá-los corretamente.

Representando números com letras

"Este segmento é patrocinado pela letra *b,* substituindo um número a ser determinado". Ok, esta é uma péssima imitação da Vila Sésamo, mas eu espero que você tenha entendido aonde quero chegar. Em álgebra, as letras substituem os números o tempo todo. Apenas tenha em mente que as letras, ou variáveis, *sempre* representam um número.

Fazer uma variável representar certa quantidade pode simplificar um problema e levar você a uma agradável solução, pois você não vai precisar lidar com um bocado de palavras confusas. Ainda que algumas vezes você precise lidar com algumas situações um pouco complicadas, não tema! Algumas regras básicas podem ajudar a transformar até as situações mais complexas em situações simples e compreensíveis.

Juntando fatores e coeficientes

Uma coisa legal sobre a álgebra é que ela sempre busca poupar energia – como, por exemplo, a energia que seria necessária para escrever sinais de multiplicação entre as letras. Até escrever pontos entre os símbolos tomava tempo, e por isso é que um sistema mais simples foi inventado. Quando um número é escrito na frente da variável, como $3x$, significa que 3 e x estão sendo multiplicados. Neste caso, o número 3 é o *coeficiente.*



O número antecedendo a variável é um *coeficiente*. Por exemplo, o número quatro é o coeficiente quando $a + a + a + a$ é expresso como $4a$.

Quando muitas variáveis são multiplicadas juntas, os sinais de multiplicação não são necessários. O termo $3xyz$ significa que todos os quatro fatores são multiplicados juntos.

Desde que o número esteja imediatamente na frente da variável, como em $2a$, isso significa que 2 e a são multiplicados juntos. Então, $2a$ é duas vezes a. O dobro de maçãs significa que se a representa 10 maçãs, então $2a$ representa 2 vezes 10, ou 20 maçãs.



Álgebra Booleana

O uso de símbolos para enunciados e relações complexas não é limitado aos nossos estudos de álgebra. O inglês George Boole desenvolveu símbolos para lidar com problemas difíceis de lógica. Seu sistema é chamado de Álgebra Booleana. O v de cabeça pra baixo, ∧, representa a palavra e; o v para cima, ∨, representa a palavra ou. As letras P, Q e R representam enunciados, por exemplo, P: Está chovendo; Q: O sol saiu. Dada a expressão P e o Q ("Está chovendo" E "O sol saiu"), ela pode ser julgada verdadeira ou falsa. Se os dois termos forem verdadeiros, então a expressão é verdadeira; é falsa se qualquer um dos termos ou os dois forem falsos. Um método de tabelas da verdade é usado em lógica para testar a validade de argumentos baseados em enunciados. O sistema de Boole é, ainda hoje, a base para o estudo da lógica.

Por exemplo, se *a* representa o número de maçãs que você tem, então o que 2ª representa?

- *Mais* duas maçãs?
- *O dobro de* maçãs?
- *Metade* das maçãs?

A resposta é: $2a$ representa duas vezes o número de maçãs que você tem.

Os símbolos + e – podem significar muitas coisas para você. Eles também significam muitas coisas em álgebra. Tudo vai depender do contexto. Esses símbolos sempre separam *termos*, que são grupos de variáveis e números conectados por sinais de multiplicação e divisão. Os sinais de mais e menos separam os termos uns dos outros.

Na linguagem da álgebra, o sinal de mais significa e, mais, aumentado por, adicionado *a*, etc. A expressão $2 + a$ pode representar:

- Um presente de *a* que se somaram aos dois reais que eu já tinha em meu bolso.
- Duas pessoas que passaram pela porta, e depois mais *a* pessoas que passaram.
- Uma temperatura de 2 graus que depois aumentou em *a* graus.

Isso tudo é diferente do termo $2a$ onde o coeficiente 2 dobra o valor da variável *a*.

O sinal de menos significa *menos, tirar, diminuído por, subtraído de, etc. a* expressão $a - 2$ pode representar:

- a administradores e depois dois foram tirados.
- Que na lagoa havia dois menos a crocodilos.
- Que William Tell tinha a maçãs quando começou e menos duas quando terminou.

Mesmo que você precise tomar cuidado ao deixar as variáveis representarem números, o benefício e a comodidade em trabalhar com variáveis superam as possíveis dificuldades. Além das vantagens de não ter que escrever muito, é mais fácil se concentrar em um problema que toma menos espaço – seus olhos podem acompanhar melhor a estrutura do enunciado. Além disso, os símbolos algébricos são precisos. Os significados ocultos que as palavras escritas podem ter não existem em álgebra – uma língua universal que atravessa as fronteiras que a língua e o tempo podem apresentar. A beleza das variáveis pode ser apreciada no seguinte exercício:

Considere as tarefas de coletar, organizar e prestar conta das moedas arrecadadas durante um evento de caridade:

n vai representar o valor de um cilindro de moedas de cinco centavos.

d vai representar o valor total de um cilindro de moedas de dez centavos.

q vai representar o valor total de um cilindro de moedas de vinte e cinco centavos.

Depois de coletar o dinheiro, você recebe a seguinte informação dos seus ajudantes:

Anna coletou seis cilindros de moedas de cinco centavos, quatro cilindros de moedas de dez centavos e nove cilindros de moedas de vinte e cinco centavos, ou $6n + 4d + 9q$.

Ben coletou cinco cilindros de moedas de cinco centavos, três cilindros de moedas de dez centavos e sete cilindros de moedas de vinte e cinco centavos, $5n + 3d + 7q$.

Cal coletou quinze cilindros de moedas de cinco centavos, dois cilindros de moedas de dez centavos e seis cilindros de moedas de vinte e cinco centavos, ou $15n + 2d + 6q$.

Don coletou um cilindro de moedas de cinco centavos, três cilindros de moedas de dez centavos e quatro cilindros de moedas de vinte e cinco centavos, ou $n + 3d + 4q$.

Monte a equação para somar todos os cilindros de moedas de cinco, dez e vinte e cinco centavos:

$$(6 + 5 + 15 + 1)n + (4 + 3 + 2 + 3)d + (9 + 7 + 6 + 4)q =$$
$$27n + 12d + 26q$$

A quantia total do dinheiro pode agora ser computada se você souber que:

o cilindro de cinco centavos vale \$2, então $n = 2$.

o cilindro de dez centavos vale \$5, então $d = 5$.

o cilindro de vinte e cinco centavos vale \$10, então $q = 10$.

Então, $27n + 12d + 26q = 27(2) + 12(5) + 26(10) = 374$

Um total de $374 foi arrecadado.

Se você apenas lida com o número de cilindros de cada moeda e deixa o cálculo do total de dinheiro para o final, as contas ficam mais simples. Os números não precisam ser tão grandes.

Fazendo as contas

A adição foi provavelmente a primeira operação que você descobriu. É a mais fácil para as pessoas de todas as idades entenderem e conhecerem. Em álgebra, somar é um pouquinho mais complicado porque algumas vezes você *não pode* somar normalmente. Mas quando você pode, é um processo interessante.

Adicionando e subtraindo variáveis

Ao realizar uma soma, ao invés de expressar $a + a + a + a$ extensamente, você pode apenas escrever $4a$, que diz a mesma coisa de forma mais eficiente já que a multiplicação é apenas a repetição da soma. No caso de $4a$, o número representado por a é somado quatro vezes. Ou, você pode dizer que a é multiplicado por quatro.

Ao expressar $a + a + a + a$ como $4a$, no entanto, você está criando um *termo* único, que é um jargão matemático para coeficiente (s) e/ou variáveis (s) agrupados juntos, mas algumas vezes separados de outros termos por um sinal de mais ou de menos. Então, a seguinte operação, na qual as variáveis a, b e c representam quaisquer números reais, tem três *termos:*

$10ab + 3c - 7c$



Ao adicionar ou subtrair termos que têm *exatamente* as mesmas variáveis, combine os coeficientes.

Ao adicionar $2a + 5a + 4a$ qual é o resultado?

Por você ter três quantidades separadas e cada uma delas ter a, você pode somar todas juntas, desde que a represente a mesma coisa em cada uma delas. Um a não pode representar o número de maçãs enquanto o outro a representa o número de porcos-da-terra. Todos devem representar a mesma coisa no mesmo problema.

Uma variável que aparece mais de uma vez em uma expressão ou equação sempre representa o mesmo número. Se a variável pudesse representar mais de uma coisa, o enunciado perderia sua coerência – sem nenhuma possibilidade de dizer o significado de uma variável para a outra.

É legal quando a variável escolhida para representar um número pode começar com a mesma letra daquilo que ela está representando, como por exemplo, p para porcos-da-terra. Mas isto não é necessário. Uma correlação entre a letra/nome é útil quando um problema é formado por mais de uma variável, mas fazer anotações cuidadosas e identificar as variáveis também funciona.

Agora tente somar a mesma variável no exemplo a seguir:

$$2a = a + a$$

$$5a = a + a + a + a + a$$

$$4a = a + a + a + a$$

Há 11 variáveis a ao todo. Note que os números na frente, os coeficientes 2, 5 e 4, também somam 11.

$$2a + 5a + 4a = (2 + 5 + 4)a = 11a$$



Ao adicionar ou subtrair termos com a mesma variável (como x ou n nos exemplos a seguir), some ou subtraia os coeficientes (números na frente das variáveis) e deixe o resultado ao lado da variável. Se a, b e c são coeficientes da variável x, então

$$ax + bx - cx = (a + b - c)x.$$

Os exemplos a seguir demonstram como adicionar termos com a mesma variável:

$$3x + 2x = 5x$$

$$9n + 6n + n = 16n$$



Quando não há número na frente da variável, considera-se que o número é um (Esta é uma das poucas vezes que você pode presumir algo e não passar vergonha).

$$a = 1a$$

$$x = 1x$$

O exemplo a seguir mostra a você como uma variável pode ser adicionada a outro termo com a mesma variável.

$$a + 3a + x + 2x = 1a + 3a + 1x + 2x = 4a + 3x$$

Note que você soma termos que têm as mesmas variáveis porque elas representam as mesmas quantias. Não tente somar os termos com variáveis diferentes. Os exemplos a seguir envolvem duas ou mais variáveis:

$$5a + 2a + 6b + 8b + 11c = 7a + 14b + 11c$$

$$3x + 4y - 2x - 8y + x = 2x - 4y$$

Ao subtrair termos, use as regras para adição e subtração de números com sinais e aplique-as aos coeficientes (Veja o Capítulo 2 para mais informações sobre como trabalhar os números com sinais).

$$5a + 4a - 2a + 6 + 3b - 2b = 7a + b + 6$$

Note que o 6 não tem uma variável. Ele está sozinho, não é multiplicado por nada.

Adicionando e subtraindo com potências

Os exemplos a seguir mostram como as operações de adição e de subtração são feitas em vários termos envolvendo variáveis. Note que os termos que combinam *sempre* têm as mesmas variáveis com, exatamente, as mesmas potências. Para mais sobre potências (expoentes) veja o Capítulo 4.

- $x + x + x = 3x$
- $x^2 - 2x^2 + 3x^2 + 3x^2 = 5x^2$
- $x + 3x + 4x^2 + 5x^2 + 6x^3 = 4x + 9x^2 + 6x^3$
- $4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$

No último exemplo, nenhuma das potências (expoentes) é igual, então mesmo as variáveis sendo iguais, você não pode somar os números da frente.



Para somar ou subtrair termos com a mesma variável, os expoentes das variáveis devem ser os mesmos. Efetue as operações solicitadas nos coeficientes, deixando a variável e o expoente do mesmo jeito.

Visto que x e x^2 não representam a mesma quantidade, eles não podem ser somados juntos.

$$3a^3 + 3a^2 + 3a + a + 2a^2 + 2a^4 = 2a^4 + 3a^3 + (3 + 2)a^2 + (3 + 1)a =$$

$$2a^4 + 3a^3 + 5a^2 + 4a$$



Note que os expoentes estão listados do maior para o menor. É uma prática comum deixar as respostas numa maneira fácil de comparar.

$$2m + 3m^2 + 5m^3 - 2m^2 - 3m - 1 = 5m^3 + (3 - 2)m^2 + (-3 + 2)m - 1 =$$

$$5m^3 + m^2 - m - 1$$

Uma expressão do tipo $5x + 3x^2 + 2y - 4y^2 + 3$ não pode ser simplificada. Há termos com expoentes iguais ($3x^2$ e $4y^2$), mas as variáveis (x e y) não são as mesmas.

Multiplicando e dividindo variáveis

Multiplicar variáveis é, em alguns casos, mais fácil do que somá-las ou subtraí-las, mas, ainda sim, você precisa ser um pouco cuidadoso. No entanto, ao dividir variáveis, você precisa seguir algumas regras relativamente rígidas. Nos tópicos a seguir eu mostro as dicas e as regras.

Multiplicando variáveis

Quando as variáveis são as mesmas, multiplicá-las juntas "comprime" todas elas em um único fator (variável). Mas você não pode combinar variáveis *diferentes*.



Ao multiplicar variáveis, multiplique os coeficientes e as variáveis como sempre. Se as bases são iguais, você pode multiplicar as bases simplesmente adicionando seus expoentes (Veja mais sobre multiplicação de expoentes no Capítulo 4). Escreva o resultado em forma compacta.

Veja estes exemplos onde as letras são as variáveis e também as bases:

- $a \cdot a \cdot b \cdot c = a^2bc$
- $2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c = 2a^3b^2c$
- $2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot 3 \cdot b \cdot b \cdot b \cdot 4 \cdot c \cdot c = 24a^4b^3c^2$
- $2 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot 3 \cdot b \cdot b \cdot b^6 \cdot 5 \cdot c \cdot c^2 \cdot c^{10} = 30a^5b^8c^{13}$
- $(2a^2b^2c^3)(4a^3b^2c^4) = 8a^{2+3}b^{2+2}c^{3+4} = 8a^5b^4c^7$
- $(3x^2yz^{-2})(4x^{-2}y^2z^4)(3xyz) = 36x^{2-2+1}y^{1+2+1}z^{-2+4+1} = 36x^1y^4z^3$

Dividindo variáveis

Quando você quer dividir uma combinação de variáveis e números, divida os números como se você estivesse reduzindo frações (veja o Capítulo 3 para redução de frações). Mas somente as variáveis iguais podem ser divididas.

Na divisão, as respostas não precisam ser exatas. Pode haver resto – um valor que sobra quando um número é divido por outro. Mas você não quer nenhum resto aqui (eles seriam termos novos). Então, tenha certeza de não deixar nada sobrando por aí.



Ao dividir variáveis escreva o problema em forma de fração. Usando o maior fator comum, divida os números e reduza. Use as regras dos expoentes (veja o Capítulo 4 ou a folha de consulta) para dividir as variáveis que são iguais.



Linha de divisão

Traço oblíquo ou barra simples: são duas palavras diferentes que caracterizam a barra (/) usada em frações. A barra também é encontrada no cenário não-matemático, como por exemplo, em expressões como "e/ou" e em "milhas/hora". Em poesia, a barra indica quebra de linha como em "Samba, samba, samba o lê lê/Samba na barra da saia o lá lá". No caso da matemática, quando a barra está na horizontal e tem valores acima e abaixo, é chamada de traço de fração.

Dividir variáveis é razoavelmente fácil. Cada variável é considerada separadamente e os coeficientes numéricos são reduzidos da mesma maneira que em frações simples.

Isto pode ser explicado com latas de alumínio: quatro amigos decidiram coletar latas de alumínio para reciclagem (e para ganhar dinheiro). Eles coletaram $12x^3$ latas e irão receber y^2 centavos por cada lata. O valor total do dinheiro coletado foi de $12x^3y^2$ centavos. Como eles poderiam dividir esse valor entre eles?

Divida o valor total por quatro para achar o valor individual que cada um dos quatro amigos vai receber. $\frac{12x^3y^2}{4} = 3x^3y^2$ centavos para cada amigo. A única coisa que divide aqui é o coeficiente.

Se você quiser o número de latas pelo qual cada um vai ser pago, divida $\frac{12x^3y^2}{4y^2} = 3x^3$ latas.

Porque usar variáveis é melhor do que usar somente números? Porque se os números mudarem, então você ainda tem todas as partes resolvidas. Deixe x e y mudarem seus valores. Trabalhe com os problemas a seguir para aprender como dividir usando variáveis, coeficientes e expoentes:

- Se a representa o número de maçãs, dez maçãs divididas em grupos de cinco resultam em dois grupos (e não duas maçãs).

  $\frac{10a}{5a} = 2$

  Dez maçãs divididas em cinco grupos resultam em duas maçãs por grupo.
- $\frac{6a^2}{3a} = 2a$

  Três divide seis duas vezes. Usando as regras dos expoentes, $a^2 \div a = a$.

Eu prefiro escrever a resposta com x no denominador e com expoente positivo, ao invés de x no numerador com expoente negativo

- $\frac{14x^2}{7x^4} = 2x^{-2} = \frac{2}{x^2}$

- $\frac{6x^3y^2}{18xy^4} = \frac{x^2}{3y^2}$

Fazendo tudo

As quatro operações principais, adição, subtração, multiplicação e divisão foram abrangidas nos tópicos anteriores. Muitos problemas de álgebra envolvem mais de uma operação, então preste atenção nos seguintes passos para saber como lidar com uma combinação de operações.

Neste exemplo as operações serão feitas em

$$4a^2b^3(2a^3b^2) + 5ab^{-2}(2a^4b^7) + 5$$

1. **Multiplique as variáveis separadamente em cada termo.**

   $4 \cdot 2a^2a^3b^3b^2 + 5 \cdot 2aa^4b^{-2}b^7 + 5$

2. **Some os expoentes das variáveis iguais.**

   $8a^{2+3}b^{3+2} + 10a^{1+4}b^{-2+7} + 5 =$

   $8a^5b^5 + 10a^5b^5 + 5$

   Você pode ver que os primeiros dois termos são parecidos, as variáveis que eles têm e os expoentes dessas variáveis são iguais. É por isso que você pode somá-los.

3. **Combine os termos que são parecidos.**

   $= (8 + 10)a^5b^5 + 5 = 18a^5b^5 + 5$

Ok. Agora que você teve êxito no desafio de resolver várias operações em um exemplo complexo, por que não seguir novamente os passos para resolver uma combinação de exemplos em um outro exemplo?

$$3m^2(2mn) - 4m^3n^3(2n^{-2}) + 5m^2n^3 - 6mn(mn)$$

1. **Multiplique as variáveis separadamente em cada termo.**

   $3 \cdot 2m^2mn - 4 \cdot 2m^3n^3n^{-2} + 5m^2n^3 - 6mmnn$

2. **Some os expoentes das variáveis iguais.**

   $6m^{2+1}n - 8m^3n^{3-2} + 5m^2n^3 - 6m^{1+1}n^{1+1} =$

   $6m^3n - 8m^3n + 5m^2n^3 - 6m^2n^2$

3. **Combine os termos que são parecidos.**

   Neste caso, somente os dois primeiros termos podem ser combinados; suas variáveis e expoentes combinam.

$(6-8)m^3n + 5m^2n^3 - 6m^2n^2 =$

$-2m^3n + 5m^2n^3 - 6m^2n^2$

O exemplo a seguir é a sua chance de impressionar.Você fez a multiplicação, então o próximo passo é a divisão (que é uma simples subtração).Vamos lá!

Neste exemplo,as operações serão feitas em

$$\frac{4x^2y^3}{2xy} - \frac{15xy^5}{3y^3} + \frac{13x^{-2}y^{11}}{x^{-5}y^8} + \frac{11x^4y^{7/2}}{xy^{1/2}}$$

1. **Divida subtraindo os expoentes de bases iguais.**

   Divida os números conhecidos. Suponha que a base sem expoente tem *um* como expoente. Neste problema vamos lidar com expoentes negativos no numerador e no denominador.

   $2x^{2-1}y^{3-1} - 5xy^{5-3} + 13x^{-2+5}y^{11-8} + 11x^{4-1}y^{7/2-1/2}$

2. **Complete a subtração nos expoentes.**

   Nota: Quando o expoente negativo (-5) que estava no denominador passou para cima, ele se tornou positivo e foi somado. Expoentes fracionários funcionam como qualquer outro expoente de número inteiro, eles são somados e subtraídos da mesma forma.

   $= 2xy^2 - 5xy^2 + 13x^3y^3 + 11x^3y^3$

3. **Some e subtraia os termos que são exatamente iguais – números que têm variáveis e expoentes em comum.**

   $(2-5)xy^2 + (13+11)x^3y^3 =$

   $-3xy^2 + 24x^3y^3$

Neste último exemplo a regra para multiplicar expoentes foi usada em dois termos. Para mais informação, veja a folha de consulta ou o Capítulo 4.

Resolva as operações em $(3x^2y)^2 + 5x^4y - (2xy^{1/2})^4 - 16xy^4$

1. **Eleve potência a potência multiplicando os expoentes.**

   $3^{1\cdot 2}x^{2\cdot 2}y^{1\cdot 2} + 5x^4y - 2^{1\cdot 4}x^{1\cdot 4}y^{(1/2)\cdot 4} - 16xy^4$

2. **Multiplique os valores nos expoentes.**

   $3^2x^4y^2 + 5x^4y - 2^4x^4y^2 - 16xy^4 =$

   $9x^4y^2 + 5x^4y - 16x^4y^2 - 16xy^4$

3. **Combine qualquer termo que possua variáveis iguais.**

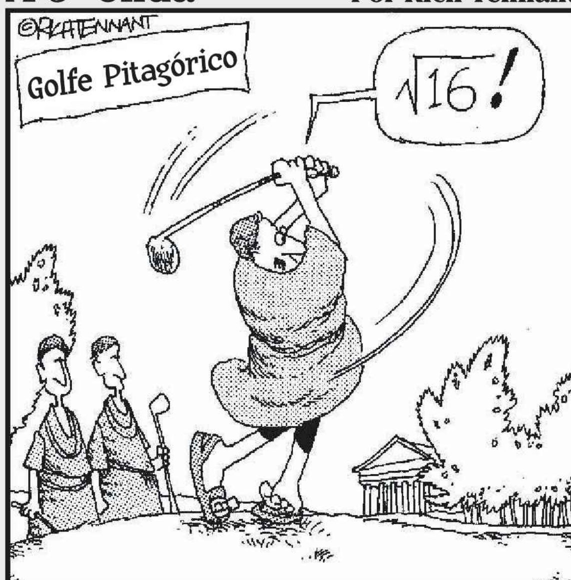
   $(9-16)x^4y^2 + 5x^4y - 16xy^4 =$

   $-7x^4y^2 + 5x^4y - 16xy^4$

Você lida primeiro com termos que têm expoentes fora dos parênteses. Depois você pode combinar os termos que têm exatamente as mesmas potências em x e y.

Parte II

Entendendo fatoração



Nesta parte...

Nestes capítulos você vai descobrir como rearrumar expressões algébricas para torná-las mais práticas. Fatoração é sempre uma prioridade e será tratada de forma aprofundada, assim como formas familiares e não familiares de arrumar suas expressões algébricas. Isso inclui também a carinha feliz FOIL (abreviatura que no português significa primeiro-externo-interno-último) no Capítulo 10. Dominando os métodos tudo se torna possível!

Capítulo 7

Trabalhando com números primos

Neste capítulo:

- Os números primos misteriosos e complicados
- Diminuindo os números grandes: regras de divisibilidade!
- Investigando os números compostos: decompondo em números primos
- Descobrindo os métodos de fatoração

Números primos (números inteiros que são divisíveis, de forma exata, apenas por eles mesmos e por um) tem sido o assunto de discussões entre matemáticos e não matemáticos durante séculos. Números primos e seus mistérios têm intrigado filósofos, engenheiros e astrônomos. Esses pesquisadores descobriram muitas informações sobre os números primos, mas restam ainda muitas hipóteses não comprovadas.

Provavelmente o maior mistério é determinar qual número primo será o próximo a ser descoberto. Computadores têm ajudado na pesquisa de uma lista detalhada de números primos, mas devido ao fato dos números não terem fim, e ao fato de ninguém ter achado um padrão ou método para listar os números primos, a questão envolvendo o *próximo número* a ser encontrado continua.

Começando com o básico

Números primos são importantes para a álgebra porque ajudam você a trabalhar com os menores números possíveis. Números grandes na maioria das vezes são incômodos e podem causar alguns erros de cálculo. Então reduzir frações até seus menores termos e fatorar expressões para tornar os problemas mais manejáveis são tarefas básicas.



Um número primo é um número inteiro e maior que o número um, que pode ser dividido, de forma exata, apenas por ele mesmo e por um.

O primeiro e menor número primo é o número dois. É o único número primo *par*. Todos os primos depois de dois, são ímpares porque todos os números pares podem ser divididos, de maneira exata por um, por eles mesmos e por dois, logo, eles não se enquadram na definição de um número primo.



Se um número é exatamente dividido por 3, somar os seus dígitos vai te dar um múltiplo de 3. Veja o Capítulo 22 para mais regras de divisibilidade.

A Tabela 7-1 lista os 20 primeiros números primos. Confira você mesmo que cada número primo pode ser dividido somente por ele mesmo e por um.

Tabela 7-1 Números Primos menores que 100

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

Quando estiver reduzindo uma fração ou fatorando uma expressão e reconhecer que um número é primo, você não deve perder tempo tentando achar números para dividi-lo.



Porque o número 1 não é primo?

Por tradição e consenso, o número 1 não é primo. A definição de um número primo é que ele pode ser dividido somente por ele mesmo e por 1. Neste caso, haveria um resultado dobrado porque 1 é ele mesmo.

Muitos teoremas e hipóteses envolvendo números primos não funcionam se o número 1 estiver incluído. Algumas vezes matemáticos da época de Pitágoras até excluíam o número 2 da lista de números primos porque eles não consideravam nem o 1 nem o 2 como números reais – eles seriam apenas geradores para os outros números pares e ímpares. Às vezes parece que algumas regras são um pouco arbitrárias. No nosso caso, se o um não for considerado como número primo, as coisas vão funcionar bem melhor.



Primos de Mersenne

Os primos de Mersenne são números primos especiais que podem ser escritos na forma de um menos uma potência de dois. Por exemplo, $2^2 - 1 = 3$; $2^3 - 1 = 7$; e $2^4 - 1 = 15$. Três e 7 são números primos, mas 15 não é primo. Então, esta fórmula nem sempre te dá como resposta um número primo, mas alguns primos podem ser escritos dessa maneira.

Em 1996, o GIMPS (Grupo de Busca de Números Primos de Mersenne) foi lançado. Isto envolveu uma competição para achar os maiores primos de Mersenne. Um cavalheiro, no seu computador residencial, achou um primo de Mersenne de tamanho considerável, e a Eletronic Frontier Foundation (Fundação Fronteira Eletrônica) o premiou com $50.000. Esta fundação está oferecendo $100.000 para a primeira pessoa que descobrir um número com 10 milhões de dígitos que seja um primo de Mersenne. Se você estiver interessado, vá neste site na internet: `www.mersenne.org`.

Compondo números compostos

Pensar em números primos é interessante, mas também podem ser um beco sem saída para fatoração de expressões algébricas ou redução de frações. O oposto dos números primos, os números compostos, podem ser divididos em pedaços fatoráveis e redutíveis. Neste tópico você vai ver como.



Os números inteiros maiores que um e que não são primos, são números compostos que podem ser divididos em números primos que se multiplicam entre si para criar um número composto. Então, você pode escrever qualquer número composto como o produto de números primos, processo conhecido como fatoração ou decomposição em números primos. Cada fatoração em números primos é única.

Alguns exemplos de fatoração dos números compostos em números primos:

- $6 = 2 \cdot 3$
- $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$
- $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$
- $250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^3$
- $510.510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$
- $42.059 = 137 \cdot 307$

Ok, o último exemplo é bizarro. Achar a fatoração sem uma calculadora, computador ou lista de primos é difícil. Os fatores de alguns números sempre são óbvios.

Escrevendo a fatoração em números primos



Fazer a fatoração de um número composto em números primos é uma maneira de provar que você não deixou pedra sobre sobre. Essas fatorações mostram a você a única maneira que um número pode ser fatorado.

Uma maneira eficiente de escrever fatoração é fazer uma divisão invertida. Você coloca o fator primo (um número primo que divide exatamente o número com o qual você está trabalhando) no lado de fora esquerdo e o resultado ou quociente (o número de vezes que divide de maneira exata) embaixo. Você divide o quociente (o número embaixo) por outro número primo e continua até que o último número seja primo. Então você pode parar. A ordem na qual você faz a fatoração não importa. Você vai obter o mesmo resultado ou lista de fatores primos independente da ordem que você use.

Veja a fatoração em números primos de 120.

$2\underline{|120}$

$2\underline{|60}$

$2\underline{|30}$

$3\underline{|15}$

$\quad 5$

Veja os números do lado esquerdo do problema e o número no final. Eles representam o mesmo que os divisores em um problema de divisão. Mas, nesse caso, eles são todos números primos. Embora muitos números compostos possam ser divisores do número 120, os números para a fatoração de 120 devem ser divisores primos.

Ao usar este processo você normalmente faz todos os "2" primeiro, depois todos os "3", depois todos os "5", sucessivamente para tornar o processo de fatoração mais fácil. Mas você pode fazer isso em qualquer ordem: $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. No próximo exemplo, comece com 13 porque é um fator óbvio. O resto está em ordem misturada.

A fatoração em números primos de 13.000:

$13\underline{|13,000}$

$5\underline{|1000}$

$2\underline{|200}$

$2\underline{|100}$

$$\begin{array}{r|l} 5 & \underline{50} \\ 2 & \underline{10} \\ & 5 \end{array}$$

Então $13,000 = 13 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 13$

Descendo até o fator primo

Fazer a fatoração real em álgebra é mais fácil quando você pode identificar quais números são compostos e quais são primos. Se você sabe o que eles são, então você sabe o que fazer com eles. Agora tente colocar todo esse conhecimento para funcionar!

Levando os números primos em conta

Use fatoração para reduzir frações. Comece somente com números e depois adicione as variáveis (letras que representam qualquer número real) à mistura.

Reduza a fração $\frac{120}{165}$ seguindo esses passos:

1. **Descubra a fatoração do numerador.**

   120 é $2^3 \cdot 3 \cdot 5$

2. **Descubra a fatoração do denominador.**

   165 é $3 \cdot 5 \cdot 11$

3. **Agora, escreva a fração com as fatorações nela.**

   $$\frac{120}{165} = \frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 11}$$

4. **Cancele os fatores que o numerador e o denominador têm iguais para ver o que sobra – a forma reduzida.**

   $$\frac{120}{165} = \frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{2^3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{\cancel{3} \cdot \cancel{5} \cdot 11} = \frac{2^3}{11} = \frac{8}{11}$$

Agora, tente reduzir a fração $\frac{100}{243}$.

1. **Descubra a fatoração do numerador.**

   100 é $2^2 \cdot 5^2$

2. **Descubra a fatoração do denominador.**

   243 é 3^5

3. Agora, escreva a fração com as fatorações nela.

$$\frac{100}{243} = \frac{2^2 \cdot 5^2}{3^5}$$

Preste atenção nas fatorações. Como você pode ver o numerador e o denominador não têm absolutamente nada em comum. A fração não pode ser reduzida. Os dois números são *primos entre si*. A beleza de se usar a fatoração em números primos é que você pode ter a certeza que as possibilidades de redução de frações estão esgotadas – você não perdeu nada. Você pode deixar a fração na forma fatorada ou voltar simplesmente para $\frac{100}{243}$. Vai depender da sua preferência.

Reduza a fração $\frac{48x^3y^2z}{84xy^2z^3}$

1. Encontre a fatoração do numerador.

$$48x^3y^2z = 2^4 \cdot 3 \cdot x^3y^2z$$

2. Encontre a fatoração do denominador.

$$84xy^2z^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot xy^2z^3$$

3. Escreva a fração com as fatorações.

$$\frac{48x^3y^2z}{84xy^2z^3} = \frac{2^4 \cdot 3 \cdot x^3y^2z}{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot xy^2z^3}$$

4. Cancele os fatores em comum.

$$\frac{2^{\cancel{4}2} \cdot \cancel{3} \cdot x^{\cancel{3}2}\cancel{y}^{\cancel{2}}\cancel{z}}{\cancel{2}^{\cancel{2}} \cdot \cancel{3} \cdot 7 \cdot \cancel{x}\cancel{y}^{\cancel{2}}z^{\cancel{3}2}} = \frac{4x^2}{7z^2}$$

Escrevendo as fatorações você pode ter certeza de que não se esqueceu de nenhum fator que o numerador e o denominador têm em comum.

Tirando os fatores – deixando o resto

Tirar os fatores comuns da lista de termos, ou as somas ou diferenças de um bocado de termos é feito por uma boa causa. É uma tarefa comum quando você está simplificando expressões e resolvendo equações. O fator comum que faz a maior diferença nesses problemas é o MDC, ou Máximo Divisor Comum. Quando você identifica o MDC e o fatora, isso só traz coisa boa.



O Máximo Divisor Comum (MDC) é o maior termo possível que divide cada termo de uma expressão contendo dois ou mais termos.

Em qualquer debate sobre fatoração o MDC, o mais fácil e comum método de fatoração, sempre aparece antes. E ele é sempre útil ao resolver equações. Em uma expressão com dois ou mais termos, achar o máximo divisor comum pode tornar a expressão mais compreensível e fácil de trabalhar.

O melhor cenário seria identificar e retirar o MDC de uma lista de termos. Algumas vezes, no entanto, o MDC não é tão facilmente identificado. Pode ter alguns fatores estranhos, como 7, 13, ou 23. Não será o fim do mundo se você não conseguir identificar um desses números como um multiplicador, mas seria melhor se você tivesse conseguido.

Os três termos na expressão $12x^2y^4 + 16xy^3 - 20x^3y^2$ têm fatores em comum. O que é o MDC? Esses passos vão ajudar você a descobrir.

1. **Determine qualquer fator numérico comum.**

   Cada termo tem um coeficiente que é dividido por uma potência de dois, que é quatro.

2. **Determine qualquer fator variável comum.**

   Cada termo tem fatores x e y. As fatorações devem ajudar a mostrar qual é o MDC.

3. **Escreva as fatorações de cada termo.**

   $12x^2y^4 = 2^2 \cdot 3 \cdot x^2y^4$

   $16xy^3 = 2^4 \cdot xy^3$

   $-20x^3y^2 = -2^2 \cdot 5 \cdot x^3y^2$

   O MDC é o produto de todos os fatores comuns pertencentes aos três termos.

4. **Encontre o MDC**

   O MDC contém a menor potência de cada variável e número que ocorre em qualquer um dos termos. Cada variável no exemplo acima tem o fator 2. Se a menor potência de 2, que aparece em qualquer um dos fatores, é 2^2, então 2^2 faz parte do MDC.

   Cada fator tem uma potência de x. Se a menor potência de x que aparece em qualquer um dos fatores é 1, então x^1 é parte do MDC.

   Cada fator tem uma potência de y. Se a menor potência de y que aparece em qualquer um dos fatores é 2, então y^2 faz parte do MDC.

   O MDC é $2^2xy^2 = 4xy^2$.



Para encontrar o máximo divisor comum (MDC) dos termos, a menor potência (expoente) de um fator específico que aparece em qualquer um dos termos determina a potência daquele fator no MDC.

O MDC de $12x^2y^4 + 16xy^3 - 20x^3y^2$ é $4xy^2$.

5. Divida cada termo pelo MDC.

Os respectivos termos são divididos assim:

$$\frac{12x^2y^4}{4xy^2} = 3xy^2$$

$$\frac{16xy^3}{4xy^2} = 4y$$

$$\frac{-20x^3y^2}{4xy^2} = -5x^2$$

Note que *todos os três resultados* da divisão não têm nada em comum. Os dois primeiros termos têm y e o primeiro e o terceiro tem x, mas nada é compartilhado pelos três. Este é o melhor resultado para uma fatoração e o resultado que você quer.

Reescreva a expressão original com o MDC fatorado e em parênteses.

$$12x^2y^4 + 16xy^3 - 20x^3y^2 = 4xy^2(3xy^2 + 4y - 5x^2)$$

Estes exemplos finais mostram mais algumas variações.

- Calcule o MDC de $40a^5x + 80a^5y - 120a^5z$

  O MDC é $40a^5$, então você pode escrever a expressão da seguinte forma:

  $40a^5(x + 2y - 3z)$.

- Calcule o MDC de $18x^2y + 25z^3 + 49z^2$

  Mesmo que nenhum dos termos seja primo, os três termos não têm nada em comum, ou seja, não há nada que os três termos compartilhem. A seguinte fatoração demonstra.

  $$18x^2y = 2 \cdot 3^2x^2y$$

  $$25z^3 = 5^2z^3$$

  $$49z^2 = 7^2z^2$$

  Os últimos dois termos têm em comum o fator z, mas o primeiro termo não tem. Essa expressão é considerada primo porque não pode ser fatorada.

Capítulo 8

Compartilhando a diversão: distribuindo

Neste capítulo:

- Dividindo o dinheiro da recompensa igualmente
- Multiplicando binômios e trinômios
- Entendendo como os mesmos modelos de assemelham

A álgebra é cheia de ações contraditórias. Primeiro pedem a você para fatorar (veja o Capítulo 9 para mais sobre fatoração) e depois para *distribuir* ou "desfatorar". Em outras palavras, primeiro pedem que você reduza frações e depois você tem que multiplicar e criar números maiores. Primeiro, pedem que você transforme uma fração em decimal e depois um decimal em fração.

Mas tenha certeza que boas razões estão por trás de todos esses processos aparentemente contraditórios. É como se você estivesse fazendo um embrulho de presente de aniversário para que depois ele seja desembrulhado. Você rega e fertiliza seu gramado para fazê-lo crescer – só para que você possa cortá-lo. Como pode ver, as contradições aparecem em todos os lugares, e não somente na álgebra!

Que bem traria você comprar um avião se não sabe pilotar? Neste capítulo, eu digo a você quando e como fatorar ou "desfatorar". Você precisa tomar decisões acertadas e ter as ferramentas certas para executá-las corretamente.

Dando um para cada

Quando as coisas são compartilhadas igualmente, todas as pessoas ou coisas envolvidas devem receber uma parte igual, e não duas vezes mais que os outros. Quando uma criança está distribuindo lembrancinhas do seu aniversário para seus coleguinhas de escola, escutamos sempre: "Um pra você, e um pra você...". No jogo Mancala, as pedras dentro de um copo são distribuídas uma para copo seguinte até que se acabem. Qualquer outra maneira é roubo! Quando o dinheiro de um prêmio é entregue aos membros do time vencedor, as partes são entregues para cada membro. Em álgebra, distribuir é basicamente o mesmo processo: cada um recebe um pedaço.

Distribuir itens é uma prática de espalhá-los igualmente. Distribuição algébrica significa multiplicar cada um dos termos dentro dos parênteses por outro termo que está fora dos parênteses.



Para distribuir um termo sobre muitos outros termos, multiplique cada um dos outros termos pelo primeiro. Distribuir é multiplicar cada termo individual em uma série de termos agrupados por um termo fora agrupamento.

$$a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

$$a(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$$



Um *termo* é formado por variável (ou variáveis) e/ou número(s) conectados por uma multiplicação e/ou divisão. Os termos são separados uns dos outros por uma adição e/ou subtração.

1. **Multiplique cada termo pelo número (s) e/ou variável (s) fora dos parênteses.**

   Distribua o número dois pelos outros termos nos parênteses.

   $2(4x+3y-6)=$

   $2(4x)+2(3y)-2(6)$

2. **Faça a operação de multiplicação em cada termo.**

   $8x+6y-12.$

Agora que você entendeu a idéia tente extrair uma operação de distribuição do seguinte cenário: Em uma determinada concessionária de carros, cinco vendedores, A, B, C, D, e E, venderam no mês passado, respectivamente, 2, 8, 6, 5, e 9 carros. Isto é 2 + 8 + 6 + 5 + 9 = 30 carros. O dono da concessionária quer dobrar as vendas esse mês. Ele quer que sua equipe venda um total de 60 carros. Se cada vendedor dobrar o que vendeu mês passado, veja o que acontece:

1. **Multiplique cada termo pelo número (s) e/ou variável (s) fora dos parênteses.**

   $2(2+8+6+5+9)=2(2)+2(8)+2(6)+2(5)+2(9)$

2. **Faça a operação de multiplicação em cada termo.**

   $4+16+12+10+18=60$ carros

A resposta será a mesma, se você primeiro distribuir ou primeiro somar o que está nos parênteses. Você tem que escolher. Distribuir antes para chegar à resposta é a melhor opção quando a multiplicação de cada termo te dá números legais. Frações ou decimais nos parênteses são algumas vezes transformados em números inteiros quando a distribuição é feita antes. A outra opção, somar o que está nos parênteses primeiro, é preferível quando a distribuição te dá muitos e grandes problemas de multiplicação. Algumas vezes é fácil saber qual caso você tem. Em outros casos, você tem que adivinhar e tentar as opções.

Distribuindo primeiro

Primeiro, dê um boa olhada no problema de distribuição diante de você. Algumas vezes você pode dizer, apenas olhando, se é mais fácil distribuir os termos de fora dos parênteses antes ou depois de somar os termos de dentro dos parênteses. Gastar um tempinho para ver qual será o melhor método pode te fazer ganhar tempo no fim.

O exemplo a seguir mostra o que significa escolher distribuir primeiro.

- Veja o que está envolvido se você distribui 60 em $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} + \frac{13}{15}$, somando primeiro as frações.

  $$60\left(\frac{30}{60} + \frac{36}{60} - \frac{45}{60} + \frac{52}{60}\right) =$$

  $$60\left(\frac{73}{60}\right) = 73$$

- Agora olhe a melhor escolha, onde a distribuição é feita antes.

  $$60\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} + \frac{13}{15}\right)$$

  Ao multiplicar por 60, você se livra de todas as frações e não precisa achar um denominar comum.

  $$60\left(\frac{1}{2}\right) + 60\left(\frac{3}{5}\right) - 60\left(\frac{3}{4}\right) + 60\left(\frac{13}{15}\right) =$$

  $$30 + 36 - 45 + 52 = 73$$

Você viu, nesse caso, as vantagens de se fazer primeiro a distribuição? No caso a seguir, no entanto, combinar o que está nos parênteses primeiro é mais fácil.

Somando primeiro

Antes de lidar com um problema de distribuição olhe o tamanho dos números. Se os números são grandes, então distribuir um termo grande nos outros termos grandes dentro dos parênteses vai somente aumentar o tamanho dos números e torná-los menos manuseáveis. No caso de números grandes, talvez seja mais fácil lidar com qualquer adição ou subtração dentro dos parênteses antes de distribuir o termo de fora dos parênteses nos de dentro.

- Distribua primeiro o 43:

  $$43(160 - 159 + 433 - 432) =$$

  $$43(160) - 43(159) + 43(433) - 43(432) =$$

  $$6880 - 6837 + 18{,}619 - 18{,}576 =$$

  $$86$$

- Agora observe a melhor opção, aquela na qual você primeiro combina:

  $43(160 - 159 + 433 - 432) =$

  $43(1+1) = 43(2) = 86$

Estes últimos exemplos são um pouco exagerados. O melhor caminho a seguir nem sempre é tão óbvio. Mas se você mantiver seus olhos abertos para as opções disponíveis você poderá economizar tempo e trabalho.

Distribuindo sinais



Sinais positivos (+) ou negativos (-) são fáceis de distribuir, mas atenção: distribuir um sinal negativo pode provocar alguns *erros*. Isso representa mais contradições!

Distribuindo positivos



Distribuir um sinal positivo não muda os sinais dos termos.

- $+(4x + 2y - 3z + 7)$ é o mesmo que multiplicar por +1.

  $+1\,(4x + 2y - 3z + 7) = +\,1\,(4x) + 1\,(2y) + 1\,(-\,3z) + 1\,(7) =$

  $4x + 2y - 3z + 7$

Mesmo quando um número positivo, que não seja o número um, é distribuído, ele não afeta os sinais dos termos.

- $+3\,(4x + 2y - 3z + 7) = +\,3\,(4x) + 3\,(2y) + 3\,(-\,3z) + 3\,(7) =$

  $12x + 6y - 9z + 21$

Não deve ser surpresa que os sinais da expressão continuaram os mesmos.

Distribuindo negativos



Ao distribuir um sinal negativo, cada termo muda do sinal negativo para positivo ou do positivo para o negativo.

Distribua um sinal negativo através de um bocado de termos.

- $-(4x + 2y - 3z + 7)$ é o mesmo que multiplicar por -1.

  $-1\,(4x + 2y - 3z + 7) = -1\,(4x) - 1\,(2y) - 1\,(-3z) - 1\,(7) =$

  $-4x - 2y + 3z - 7$

Mude cada termo para o sinal oposto.



Um erro a ser evitado quando você está distribuindo um sinal negativo é não distribuir por todos os termos. Este é especialmente o caso quando o processo é escondido. Por escondido, eu quero dizer que o sinal negativo pode não estar na frente da expressão toda, onde ele se destaca. Ele pode estar entre os termos, mostrando uma subtração e sem ser reconhecido pelo que realmente é. Não deixe que os sinais negativos coloquem você numa cilada.

1. **Distribua o termo.**

   $4x\,(x - 2) - (5x + 3)$

   Distribua o $4x$ pelo x e pelo número 2, multiplicando ambos os termos por $4x$.

   $4x\,(x - 2) = 4x\,(x) - 4x\,(2)$

2. **Distribua qualquer sinal negativo.**

   Distribua o sinal negativo pelo $5x$ e pelo número 3, mudando o sinal de cada termo. Mas tenha cuidado: um erro pode ser facilmente cometido quando o sinal negativo é distribuído somente pelo termo $5x$. $-(5x + 3) = -(+5x) - (+3)$

3. **Multiplique e combine termos iguais.**

   $4x\,(x) - 4x\,(2) - (+5x) - (+3) = 4x^2 - 8x - 5x - 3 =$

   $4x^2 - 13x - 3$



Palíndromo

A palavra palíndromo vem da palavra grega palíndromos, que significa volta correndo de novo. Um palíndromo é qualquer palavra, frase, ou até mesmo um poema completo que se for lido da esquerda para a direita e ao contrário possui o mesmo sentido. Por exemplo: Leigh Mercer escreveu "A man, a plan, a canal – Panama" para honrar o homem responsável por construir o Canal do Panamá. Ou, o que você acha de, "Niagara, O roar again!" Existem algumas palavras em inglês que são palíndromos: rotator, Malayalam (idioma do leste da Índia), e redivider. Números palíndromos têm sido de grande interesse para os matemáticos ao longo dos anos. Os quadrados perfeitos são palíndromos: 121 e 14.641, por exemplo. Um dia palíndromo pode ser 20 de fevereiro de 2002 (20022002). Aparentemente, invertendo os dígitos de quase qualquer número e somando o inverso ao número original pode criar um palíndromo. Se não, apenas repita os passos até você achar um palíndromo. Por exemplo, pegue o número 146, inverta os dígitos para ter 641. Some os dois números: 146 + 641 = 787.

Invertendo as funções na distribuição

Distribuir uma multiplicação ao longo de uma expressão que tem muitos termos somados ou subtraídos é uma extensão da multiplicação simples. O que isto faz em termos da regra *comutativa?*



A multiplicação é comutativa, o que significa dizer que a ordem em que você multiplica os termos não importa: $a \times b = b \times a$.

O que acontece com a distribuição se você inverte a ordem? Afinal de contas, adição e subtração também estão envolvidas.

1. **Distribua o termo na frente dos parênteses por cada termo.**

   Considere $3(x^2 + y - 7 - z)$ e compare a $(x^2 + y - 7 - z)3$. Na primeira expressão o três está na frente.

   $$3(x^2 + y - 7 - z) = 3(x^2) + 3(y) + 3(-7) + 3(-z)$$

2. **Multiplique cada termo.**

   $$3x^2 + 3y - 21 - 3z$$

3. **Distribua cada termo pelo termo depois dos parênteses.**

   Na segunda expressão o três está atrás.

   $$(x^2 + y - 7 - z)3 = x^2(3) + y(3) - 7(3) - z(3)$$

   Os fatores podem ser invertidos em cada termo porque a multiplicação é comutativa.

4. **Multiplique e reescreva.**

   $$3x^2 + 3y - 21 - 3z$$

   Os resultados são exatamente os mesmos. Oba! Uma tarefa que se tornou bem mais fácil!

Misturando os sinais com números e variáveis

Distribuir variáveis pelos termos de uma expressão algébrica envolve as regras de multiplicação e as regras para expoentes. Quando variáveis diferentes são multiplicadas juntas elas podem ser escritas lado a lado sem que seja necessário usar qualquer sinal de multiplicação. Se a mesma variável for multiplicada como parte da distribuição, então os expoentes são somados juntos.



A regra do expoente diz que ao multiplicar expoentes de mesma base somam-se os expoentes:

$$a^2 \cdot a^3 = a^5.$$

A regra do expoente para multiplicação de termos com a mesma base é usada no problema a seguir.

1. **Distribua o termo de fora dos parênteses pelos termos de dentro.**

   Multiplique a pela expressão $a^4 + 2a^2 + 3$

   $$a(a^4 + 2a^2 + 3) = a \cdot a^4 + a \cdot 2a^2 + a \cdot 3$$

2. **Complete a multiplicação.**

   $$a^5 + 2a^3 + 3a$$

De novo:

1. **Distribua o termo de fora dos parênteses pelos termos de dentro.**

   Multiplique a^3 pela expressão $a^4 + 2a^2 + 3$

   $$a^3(a^4 + 2a^2 + 3) = a^3 \cdot a^4 + a^3 \cdot 2a^2 + a^3 \cdot 3$$

2. **Some os expoentes.**

   $$a^{3+4} + 2a^{2+3} + a^3 \cdot 3$$

3. **Complete a multiplicação.**

   $$a^7 + 2a^5 + 3a^3$$



A forma de somar expoentes não muda só porque tem números negativos e frações. Por exemplo: $4 + (-2) = 2$; $4 + (-4) = 0$; $4 + \frac{1}{3} = 4\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$.

1. **Distribua o termo de fora dos parênteses pelos de dentro.**

   Distribua z^4 por cada termo.

   $$z^4(2z^2 - 3z^{-2} + z^{-4} + 5z^{1/3}) = z^4 \cdot 2z^2 - z^4 \cdot 3z^{-2} + z^4 z^{-4} + z^4 \cdot 5z^{1/3}$$

2. **Some os expoentes.**

   $$2z^{4+2} - 3z^{4-2} + z^{4-4} + 5z^{4+1/3}$$

3. **Complete a distribuição.**

   $$2z^6 - 3z^2 + z^0 + 5z^{13/3} = 2z^6 - 3z^2 + 1 + 5z^{13/3}$$



O expoente zero significa que o valor da expressão é um.

$$x^0 = 1$$

Você combina expoentes com sinais diferentes usando as regras de adição e subtração de números com sinais. Expoentes fracionários são combinados depois de encontrarmos os denominadores comuns. Os expoentes que são frações impróprias são deixados nessa forma.

Tente passar por todas as situações possíveis durante a distribuição, como, por exemplo, distribuir um número e uma variável, distribuir muitas potências de mais de uma variável, distribuir números negativos reescrevendo expoentes negativos em termos fracionários, distribuir potências fracionárias ou distribuir radicais. Isto é quase tudo com o que você pode se deparar.

- Combine as variáveis usando as regras dos expoentes.
  Multiplique cada termo por $5x$.

  $$5x(2x^2 + 3x - 4) = 5x \cdot 2x^2 + 5x \cdot 3x - 5x \cdot 4$$

  Multiplique os números e as variáveis em cada termo.

  $$10x^3 + 15x^2 - 20x$$

- Combine as variáveis com a mesma base usando as regras dos expoentes.
  Os sinais dos resultados seguem as regras para multiplicar números com sinais.

  $$-6y(5xy - 4x - 3y + 2)$$

  Multiplique cada termo por $-6y$.

  $$-6y(5xy) - 6y(-4x) - 6y(-3y) - 6y(2)$$

  Faça a multiplicação em cada termo.

  $$-30xy^2 + 24xy + 18y^2 - 12y$$

- Note que o último termo na próxima reposta é o oposto do termo fora dos parênteses. É multiplicado por -1, que é o último termo dentro dos parênteses.

  $$5x^2y^3(16x^2 - 2x + 3xy + 4y^3 - 11y^5 + z - 1) =$$

  Multiplique cada termo por $5x^2y^3$.

  $$5x^2y^3 \cdot 16x^2 - 5x^2y^3 \cdot 2x + 5x^2y^3 \cdot 3xy + 5x^2y^3 \cdot 4y^3 - 5x^2y^3 \cdot 11y^5$$
  $$+5x^2y^3z - 5x^2y^3$$

  Complete a multiplicação em cada termo. Some os expoentes caso necessário.

  $$80x^4y^3 - 10x^3y^3 + 15x^3y^4 + 20x^2y^6 - 55x^2y^8 + 5x^2y^3z - 5x^2y^3$$

  Não há nenhum termo igual para ser combinado.

Distribuindo sinais negativos

Distribuir o sinal negativo é mudar os sinais para seus opostos. Somente as variáveis que são iguais têm mudanças exponenciais porque as bases são as mesmas.

- Veja o problema a seguir. Ele se apresenta cheio de sinais negativos.

  $-4xyzw(4 - x - y - z - w)$

  Multiplique cada termo por $-4xyzw$.

  $-4xyzw(4) - 4xyzw(-x)$
  $-4xyzw(-y) - 4xyzw(-z) - 4xyzw(-w)$

  Complete a multiplicação em cada termo.

  $-16xyzw + 4x^2yzw + 4xy^2zw + 4xyz^2w + 4xyzw^2$

- No próximo exemplo, o $-5x$ é distribuído pelos dois primeiros termos. O $4x^2$ é distribuído pelos dois termos seguintes.

  $-5x(3x + 2) + 4x^2(5 - 3x)$

  Distribua os dois fatores diferentes.

  $-5x \cdot 3x - 5x \cdot 2 + 4x^2 \cdot 5 + 4x^2(-3x)$

  Multiplique os termos individuais.

  $-15x^2 - 10x + 20x^2 - 12x^3$

  Os dois termos com x^2 são combinados em um termo.

  $-10x + 5x^2 - 12x^3$

Expoentes negativos dão respostas fracionárias

Como o título sugere, a base que tem um expoente negativo pode ser transformada em fração. A base e o expoente se tornam o denominador, mas o expoente perde o sinal negativo no processo. Depois complete o processo colocando o número um no numerador.



A fórmula para mudar expoentes negativos em frações é $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Veja o Capítulo 4 para mais detalhes sobre expoentes negativos.

O exemplo a seguir mostra como um expoente negativo é transformado em fração.

- Distribua $5a^{-3}b^{-2}$ por cada termo nos parênteses.

  $5a^{-3}b^{-2}(2ab^3 - 3a^2b^2 + 4a^4b - ab) =$

  $5a^{-3}b^{-2}(2ab^3) - (5a^{-3}b^{-2})(3a^2b^2) +$
  $(5a^{-3}b^{-2})(4a^4b) - (5a^{-3}b^{-2})(ab)$

  Some os expoentes.

  $10a^{-3+1}b^{-2+3} - 15a^{-3+2}b^{-2+2} + 20a^{-3+4}b^{-2+1} - 5a^{-3+1}b^{-2+1}$

  O fator de b com o expoente 0 se torna 1.

  $10a^{-2}b^1 - 15a^{-1}b^0 + 20a^1b^{-1} - 5a^{-2}b^{-1}$

  O próximo passo mostra o resultado final sem os expoentes negativos. Nele usamos a fórmula para transformar expoentes negativos em frações, que foi expressa previamente nesse capítulo.

  $\frac{10b}{a^2} - \frac{15}{a} + \frac{20a}{b} - \frac{5}{a^2b}$

Trabalhando com potências fracionárias

Os expoentes em forma de frações funcionam da mesma maneira que os expoentes inteiros. Eles são somados juntos. A única dificuldade é que as frações têm que ter o mesmo denominador para serem somadas.

- Tente o seguinte problema de distribuição com expoentes em forma de frações para ter uma idéia de como resolvê-lo:

  $x^{1/4}y^{2/3}\left(x^{1/2} + x^{3/4}y^{1/3} - y^{-1/3}\right)$

  Distribua o $x^{1/4}y^{2/3}$.

  $x^{1/4}y^{2/3} \cdot x^{1/2} + x^{1/4}y^{2/3} \cdot x^{3/4}y^{1/3} - x^{1/4}y^{2/3} \cdot y^{-1/3}$

  Reorganize as variáveis e some os expoentes.

  $x^{1/4}x^{1/2}y^{2/3} + x^{1/4}x^{3/4}y^{2/3}y^{1/3} - x^{1/4}y^{2/3}y^{-1/3}$

  $x^{1/4+1/2}y^{2/3} + x^{1/4+3/4}y^{2/3+1/3} - x^{1/4}y^{2/3-1/3}$

  Some as frações.

  $x^{3/4}y^{2/3} + x^1y^1 - x^{1/4}y^{1/3}$



Os radicais podem ser transformados em expressões com expoentes fracionários. Isso é bastante útil quando você quer combinar termos com as mesmas bases e você tem algumas das bases sob radicais.

- $\sqrt{x} = x^{1/2}$
- $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} = x^{1/2}y^{1/2}$
- $\sqrt{x^3} = (x^3)^{1/2} = x^{3/2}$

Nesse caso a distribuição é mais fácil se você primeiro transformar tudo em expoentes fracionários (Veja mais sobre operações exponenciais com radicais no Capítulo 4).



A raiz do radical torna-se o denominador do expoente fracionário. Por exemplo: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ and $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$.



A regra do expoente para elevar a uma potência um produto nos parênteses é multiplicar cada potência nos parênteses pela potência de fora. Por exemplo: $(x^4y^3)^2 = x^8y^6$.

1. **Mude a notação radical para expoentes fracionários.**

   $$\sqrt{xy^3}\,(\sqrt{x^5y} - \sqrt{xy^7}) = (xy^3)^{1/2}\left[(x^5y)^{1/2} - (xy^7)^{1/2}\right]$$

2. **Eleve as potências.**

   $$x^{1/2}y^{3/2}\left[x^{5/2}y^{1/2} - x^{1/2}y^{7/2}\right]$$

3. **Distribua o termo de fora por cada termo dentro dos parênteses.**

   $$x^{1/2}y^{3/2}(x^{5/2}y^{1/2}) - x^{1/2}y^{3/2}(x^{1/2}y^{7/2})$$

4. **Some os expoentes das variáveis.**

   $$x^{6/2}y^{4/2} - x^{2/2}y^{10/2}$$

5. **Simplifique as frações.**

   $$x^3y^2 - x^1y^5$$



Simplificar significa combinar tudo que possa ser combinado para colocar uma expressão na sua forma mais fácil de entender.

Neste exemplo, a única coisa cumprida foi que as convenções normais de ter os números primeiro, seguido das variáveis em ordem alfabética foram observadas.

- Como você pode ver nada combina no exemplo a seguir.

  $$(4 - 5x^2y + mnp)$$

  Distribua $a^3b^4c^6$.

  $$a^3b^4c^6(4) - a^3b^4c^6(5x^2y) + a^3b^4c^6(mnp)$$

  Multiplique cada termo.

  $$4a^3b^4c^6 - 5a^3b^4c^6x^2y + a^3b^4c^6mnp$$

Distribuindo mais de um termo

As seções anteriores deste capítulo descreveram como distribuir um termo em vários outros. Esta seção vai mostrar como distribuir um binômio, que é um polinômio de dois termos. Você também vai descobrir como distribuir polinômios.



O maior grau em um polinômio

Qual é o maior grau em um polinômio? O maior grau de $x^3 + 1$, por exemplo é 3, então é um binômio cúbico. A palavra cúbico diz a você que o maior grau é 3, e a palavra binômio diz que o polinômio tem um total de 2 termos, o x^3 e o 1. Um polinômio quíntico tem como maior grau o número 5.

As palavras em itálico a seguir estão listadas juntamente com seus graus correspondentes. As frases em parênteses podem ajudar você a lembrar e associar a palavra ao grau correspondente.

- Primeiro grau: linear ou mono (a exemplo da monogamia para uma mulher).
- Segundo grau: quadrática (como no uso de quadrilátero para designar um polígono de quatro lados).
- Terceiro grau: cúbico (como um cubo de açúcar com três dimensões).
- Quarto grau: quártica (quatro xícaras em um quarto de galão).
- Quinto grau: quíntico (quíntuplos – cinco deles!).
- Sexto grau: sêxtica (ou se for muito rude, use hexa).
- Sétimo grau: se(p)t (se você preferir, hepta).
- Oitavo grau: octo (lembre-se do polvo ou do Doutor Octopus com oito tentáculos).
- Nono grau: nona (nonaedro ou eneaedro, para um polígono de nove lados).
- Décimo grau: deci(m) (como em decimal e decibel).
- Centésimo grau: cent(i) (como em centavo).



A palavra *polinômio* vem de poli que quer dizer muitos e de ***nómos*** que significa distribuição. Um polinômio é uma expressão algébrica com um ou mais termos. Por exemplo, um polinômio de um termo é um monômio, um polinômio de dois termos é um binômio, se tiver três termos é um trinômio.

Distribuindo binômios

Distribuir dois termos, ou um binômio, por muitos termos é simplesmente aplicar o processo de distribuição duas vezes. Os seguintes passos mostram como:

1. **Divida o primeiro binômio em dois termos.**

   Neste caso, $(x^2 + 1)(y - 2)$, divida o binômio em seus dois termos, x^2 e 1.

2. **Distribua cada temo do primeiro binômio pelos outros termos.**

   Distribua o primeiro termo, que é x^2, do primeiro binômio $(x^2 + 1)$, pelo segundo binômio, e distribua o segundo termo, que é 1, do primeiro binômio pelo segundo binômio.

   $$x^2(y - 2) + 1(y - 2)$$

3. **Faça as duas distribuições.**

$$x^2(y-2)+1(y-2)=x^2y-2x^2+y-2$$

4. **Simplifique e combine qualquer termo igual.**

Neste caso, nada pode ser combinado.

Agora que você sabe como se faz, tente fazer a distribuição polinomial com variáveis em todos os termos.

1. **Divida o primeiro binômio em seus dois termos.**

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Divida o primeiro binômio em seus dois termos para distribuir pelos outros termos.

2. **Distribua cada termo do primeiro binômio pelos outros termos.**

Distribua a e b pelos outros termos.

$$a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$$

3. **Faça as duas distribuições.**

$$a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$

4. **Simplifique e combine os termos iguais.**

Alguns termos podem ser combinados. Note que o segundo e o quarto termos são opostos e que o terceiro e o quinto termos são opostos.

$$a^3+b^3$$

Isso nos ajuda a simplificar bem as coisas.

Na medida em que você resolve o problema a seguir, note o sinal negativo distribuído pelos três últimos termos e que os dois termos do meio combinam.

1. **Divida o binômio nos seus dois termos x^2 e $-y^2$.**

$$(x^2-y^2)(x^2+2xy+y^2)$$

2. **Distribua cada termo do binômio pelos outros termos.**

$$x^2(x^2+2xy+y^2)-y^2(x^2+2xy+y^2)$$

3. **Faça as duas distribuições.**

$$x^2(x^2)+x^2(2xy)+x^2(y^2)-y^2(x^2)-y^2(2xy)-y^2(y^2)$$

4. **Simplifique e combine qualquer termo igual.**

Multiplique e some os expoentes.

$$x^4+2x^3y+x^2y^2-x^2y^2-2xy^3-y^4$$

Combine os termos.

$$x^4+2x^3y-2xy^3-y^4$$

Distribuindo trinômios

Um trinômio – polinômio com três termos – pode ser distribuído por outras expressões. Cada termo do primeiro fator é distribuído separadamente pelo segundo fator e depois toda a expressão é simplificada, combinando qualquer coisa que possa ser combinada.

O exemplo a seguir apresenta como fazer a distribuição de trinômios.

1. **Divida o trinômio nos seus três termos *x*, *y* e 2.**

   $(x + y + 2)(x^2 - 2xy + y + 1)$

2. **Distribua cada termo do trinômio pelos outros termos.**

   $x(x^2 - 2xy + y + 1) + y(x^2 - 2xy + y + 1) + 2(x^2 - 2xy + y + 1)$

3. **Faça as três distribuições.**

   $x^3 - 2x^2y + xy + x + x^2y - 2xy^2 + y^2 + y + 2x^2 - 4xy + 2y + 2$

4. **Simplifique e combine os termos iguais.**

   $x^3 - x^2y + 2x^2 + x - 2xy^2 + y^2 - 3xy + 3y + 2$

Um trinômio vezes um polinômio

É aqui que você pode estabelecer uma regra que pode cobrir quase todos os produtos de qualquer número de termos. Você pode usar esse método geral para quatro, cinco ou mais termos.



Ao distribuir um polinômio por qualquer outro número de termos, distribua cada termo do primeiro fator por todos os termos dos segundo fator. Quando a distribuição terminar, combine os termos iguais para simplificar.

O exemplo a seguir é composto por nada mais do que variáveis, e nenhuma delas é igual.

1. **Separe os termos do primeiro fator. Multiplique cada termo do primeiro fator pelo segundo fator.**

   $(a + b + c + d + \cdots)(z + y + w + x + \cdots) =$

   $a(z + y + x + w + \cdots) + b(z + y + x + w + \cdots) + c(z + y + x + w + \cdots) + \cdots$

2. **Distribua e faça a multiplicação.**

   $az + ay + ax + aw + \cdots + bz + by + bx + bw + \cdots + cz + cy + cx + cw + \cdots$

3. Combine os termos iguais.

Neste caso, nenhum dos termos é igual, mas você deve checar.

O exemplo a seguir mostra como multiplicar dois trinômios.

1. Separe os termos no primeiro fator. Multiplique cada termo do primeiro fator pelo segundo fator.

$$(x^2 + x + 2)(3x^2 - x + 1)$$

$$x^2(3x^2 - x + 1) + x(3x^2 - x + 1) + 2(3x^2 - x + 1)$$

2. Distribua e faça a multiplicação.

$$3x^4 - x^3 + x^2 + 3x^3 - x^2 + x + 6x^2 - 2x + 2$$

3. Combine os termos iguais.

$$3x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 2$$

Assim como a expressão que resulta da diferença de dois cubos, o problema a seguir usa de novo as mesmas duas variáveis. Além disso, o primeiro fator é um binômio e o segundo um trinômio. Mas este problema é um pouco diferente.

1. Separe os termos do primeiro fator. Multiplique cada termo do primeiro fator pelo segundo fator.

$$(a^2 - b^2)(a^2 - ab - b^2)$$

$$a^2(a^2 - ab - b^2) - b^2(a^2 - ab - b^2)$$

2. Distribua e faça a multiplicação.

$$a^4 - a^3b - a^2b^2 - a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

3. Combine os termos.

$$a^4 - a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

Fazendo distribuições especiais

Muitos atalhos de distribuição podem tornar a vida mais fácil. Distribuir binômios por outros termos não é difícil, mas você pode economizar tempo se você reconhecer problemas onde pode aplicar um atalho. Se não conseguir notar que um atalho em particular poderia ter sido usado, não se preocupe demais com a sua desatenção, mas saiba que você pode acabar se revoltando por não ter tirado vantagem de um processo facílimo.

Reconhecendo um binômio quadrado perfeito



Quando o mesmo binômio é multiplicado por ele mesmo – quando cada um dos dois primeiros termos é distribuído pelos segundos e iguais termos – o trinômio resultante contém o quadrado dos dois termos e duas vezes o produto deles:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

- O resultado da operação a seguir é a soma dos quadrados de x e 3, junto com duas vezes o produto deles.

  $(x+3)(x+3)$

  O quadrado de x é x^2.

  O quadrado de 3 é 9.

  Duas vezes o produto de x e 3 é $2(3x) = 6x$

  $(x+3)(x+3) = x^2 + 6x + 9$.

  Note que a ordem habitual dos termos foi usada: ordem decrescente das potências de x.

- Tente a seguinte distribuição binomial com sinais negativos (não se esqueça de elevar ao quadrado o 4 e o y).

  $(4y-5)(4y-5)$

  O quadrado de $4y$ é $16y^2$.

  Note que o próximo quadrado é positivo.

  O quadrado de -5 é 25.

  Duas vezes o produto de $4y$ e -5 é $2(4y)(-5) = -40y$

  Então $(4y-5)(4y-5) = 16y^2 - 40y + 25$

- No exemplo a seguir, os termos são variáveis.

  $(a^3 + b^2)(a^3 + b^2)$

  O quadrado de a^3 é $(a^3)^2 = a^6$

  O quadrado de b^2 é $(b^2)^2 = b^4$

  Duas vezes o produto de a^3 e b^2 é $2a^3b^2$

  Então $(a^3 + b^2)(a^3 + b^2) = a^6 + 2a^3b^2 + b^4$

- Os parênteses agrupam os dois últimos termos nesta distribuição trinomial.

  $[x + (a+b)][x + (a+b)]$

  O quadrado de x é x^2

  O quadrado de $(a+b)$ é $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Duas vezes o produto de x e $(a + b)$ é $2x(a + b)$

$$[x + (a + b)][x + (a + b)] = x^2 + 2x(a + b) + a^2 + 2ab + b^2$$

Se você ainda quer multiplicar mais, você pode distribuir o segundo termo.

$$x^2 + 2xa + 2xb + a^2 + 2ab + b^2$$

Identificando a soma e a diferença dos mesmos dois termos

Há apenas uma pequena – porém importante – diferença entre essas multiplicações e as do tópico anterior. A diferença é que há uma mudança de sinal entre o primeiro e o segundo binômio. Se o sinal entre os dois termos do primeiro binômio é positivo, então o sinal do segundo é negativo. Os mesmos dois termos são sempre usados – é somente o sinal entre eles que muda.

A soma de quaisquer dois termos multiplicada pela diferença desses mesmos dois termos é fácil de reconhecer e mais fácil ainda de resolver.



A soma de quaisquer dois termos multiplicada pela diferença deles é igual a diferença dos quadrados dos mesmos dois termos. Para qualquer número real a e b:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Note que o termo do meio desaparece porque o termo e seu oposto estão sempre no meio. Veja:

$$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$$

Distribua o a e o b pelo segundo fator.

$$a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

- A regra sempre funciona. Então você pode usar o atalho para fazer essas distribuições especiais.

  $$(x - 4)(x + 4)$$

  O primeiro termo ao quadrado é x^2

  O segundo termo vai sempre ser negativo e um quadrado perfeito como o primeiro termo.

  $$(-4)(+4) = -16$$

  Então $(x - 4)(x + 4) = x^2 - 16$

- Tente o mesmo processo fácil – multiplicar a soma de dois termos pela diferença deles – de novo. Agora com uma variável um pouquinho mais complicada.

  $$(ab - 5)(ab + 5)$$

O quadrado de $ab = (ab)^2 = a^2b^2$

O oposto do quadrado de $5 = -25$

Então $(ab - 5)(ab + 5) = a^2b^2 - 25$

- O exemplo a seguir te dá a chance de resolver a soma e a diferença de vários agrupamentos.

  $[5 + (a - b)][5 - (a - b)]$

  O quadrado de $5 = 25$

  O oposto do quadrado de $(a - b) = -(a - b)^2$

  Eleve o binômio ao quadrado e distribua o sinal negativo.

  $-(a^2 - 2ab + b^2) = -a^2 + 2ab - b^2$

  Então $[5 + (a - b)][5 - (a - b)] = 25 - a^2 + 2ab - b^2$

Calculando a diferença de dois cubos

O que são cubos? Embora alguns cubos sejam feitos de açúcar e temperos ou qualquer coisa boa, os cubos usados em álgebra são um pouco diferentes. Alguns deles são objetos tridimensionais, mas neste tópico, cubos são valores que são multiplicados por eles mesmos por três vezes. Lembre-se, um valor multiplicado por ele mesmo é um quadrado perfeito, um valor multiplicado por ele mesmo três vezes é um cubo perfeito. A variável x ao cubo é escrita como x^3. Por exemplo, três ao cubo (3^3) é 27 porque $3 \times 3 \times 3 = 27$.

Uma expressão que resulta na diferença entre dois cubos é normalmente muito difícil de identificar. Você pode não notá-la até que chegue a resposta final e diga, "Ah tá. Está certo!". No entanto, ser capaz de reconhecer o que resulta na diferença entre dois cubos será muito mais importante no Capítulo 15, que fala de equações cúbicas (equações que têm pelo menos um termo com expoente 3 e nenhum outro expoente maior).



A diferença de dois cubos é igual a diferença das suas raízes cúbicas multiplicada por um trinômio, que contém os quadrados das raízes cúbicas e o oposto do produto das raízes cúbicas. Para qualquer número real a e b,

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Para reconhecer qual distribuição resulta na diferença de dois cubos verifique se a distribuição tem um binômio $(a - b)$, que é a diferença entre dois termos, multiplicado por um trinômio, $(a^2 + ab + b^2)$, que tem os quadrados dos dois termos e o oposto do produto.



O oposto do número é o mesmo número com um sinal diferente na frente. Se o número for um número negativo, então o seu oposto seria positivo e vice versa.

- Vá em frente e distribua para ver como isso funciona.

  $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

  Distribua o a e o $-b$ pelo trinômio.

  $a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$

  Distribua os dois valores separadamente e multiplique cada termo.

  $a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$

  Note que os quatro termos no meio são todos pares de opostos cuja soma é zero.

  Combine os termos iguais.

  $a^3 - b^3$

  Este modelo sempre resulta na diferença de dois cubos.

- Se você reconhecer o modelo no exemplo a seguir – que tem termos que compreendem números conhecidos e variáveis múltiplas – então já pode se considerar um algébrico de primeira linha!

  $(2 - ab)(4 + 2ab + a^2b^2)$

  O quadrado de ab é $(ab)^2 = a^2b^2$, e o cubo de ab é $(ab)^3 = a^3b^3$.

  Então $(2 - ab)(4 + 2ab + a^2b^2) = 8 - a^3b^3$

Encontrando a soma de dois cubos

Isto deve parecer familiar. É a mesma coisa que descobrir o resultado da diferença de dois cubos, exceto que dois sinais mudam. O binômio tem um sinal de mais e o termo do meio no trinômio tem um sinal de menos.

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

Ao trabalhar com dois fatores, o binômio e o trinômio, que te dão a soma ou diferença de dois cubos, a única diferença nos fatores é os dois sinais. O sinal no binômio é sempre o oposto do sinal no meio do trinômio. Veja o que quero dizer nas seguintes equações. O primeiro resultado é a soma de dois cubos, e o segundo resultado é a diferença de dois cubos.

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Faça os seguintes exemplos para que você possa entender melhor:

- O sinal no binômio é +, então a resposta tem um +. O cubo de 4 é 64.

  $$(x+4)(x^2-4x+16)=x^3+64$$

- O oposto do produto de 6 e $5yz$ é $-30yz$. O cubo de $5yz=(5yz)^3=5^3y^3z^3$.

  $$(6+5yz)(36-30yz+25y^2z^2)=216+125y^3z^3$$



Da mesma forma que é legal ter uma lista de quadrados perfeitos porque eles são muito usados em álgebra, também é legal ter uma lista de cubos perfeitos. Você sempre pode usar sua calculadora para achar o cubo de um número, mas economiza tempo se já souber. Reconhecer que um número é um cubo perfeito pode ser útil posteriormente.

Tente memorizar a lista da Tabela 8-1.

Tabela 8-1	Os dez primeiros cubos perfeitos
$1^3=1$	$6^3=216$
$2^3=8$	$7^3=343$
$3^3=27$	$8^3=512$
$4^3=64$	$9^3=729$
$5^3=125$	$10^3=1.000$

Capítulo 9

Fatoração em primeiro grau

Neste capítulo:

Tirando o que todos os termos têm em comum

Usando variáveis versus números

Achando o Máximo Divisor Comum (MDC)

Colocando os termos juntos

Você deve acreditar na filosofia "quanto maior melhor", que pode ser aplicada a salários, biscoitos ou casas, mas realmente não funciona na álgebra. Para a grande maioria das pessoas, o oposto é verdade: números menores são mais fáceis e mais confortáveis de lidar do que números grandes. Neste capítulo, você vai poder descobrir como chegar a esse "quanto menor melhor" em relação a termos. Termos de primeiro grau têm uma variável com expoente igual a um. Os modelos de fatoração que você verá aqui serão usados, de certa forma, em graus maiores.

Fatoração

Fatoração é outra maneira de dizer: "Reescreva isso de modo que tudo seja multiplicado junto". Você normalmente começa com dois ou mais termos e tem que determinar como reescrevê-los de tal forma que todos sejam multiplicados juntos de uma maneira ou de outra.

Fatorando números

Antes que eu comece a te mostrar regras e instruções sobre como fatorar em álgebra, você deve querer saber como são os resultados de uma fatoração. Primeiro, dê uma olhada nos exemplos a seguir:

Fatorar é o oposto de distribuir; é, na verdade, "não distribuir" (veja o Capítulo 8 para mais sobre distribuição). Na distribuição, você multiplicou uma série de termos por um fator comum. Agora, em fatoração, você espera encontrar o que uma série de termos tem em comum e para então retirá-lo, dividindo cada

termo pelo fator comum. Pense em cada termo como sendo o numerador e depois ache o mesmo denominador para cada. Por meio da fatoração o fator comum é colocado do lado de fora dos parênteses ou colchetes e todos os resultados das divisões são deixados do lado de dentro.

1. **Determine o fator comum.**

   Na expressão $16a - 8b + 40c^2$, 2 é um fator comum.

2. **Divida ou fatore cada termo pelo fator comum e escreva os resultados da divisão nos parênteses com o fator do lado de fora.**

   Neste exemplo, isto se assemelha a $16a - 8b + 40c^2 = 2(8a - 4b + 20c^2)$

3. **Determine se você pode fatorar qualquer outro termo.**

   Os termos deixados nos parênteses ainda estão muito grandes. Todos ainda têm algo em comum: 4. Fatorando o número 4, você tem

   $2(4[2a - b + 5c^2])$

4. **Simplifique sua resposta.**

   Se você fatorar o número 4 depois de fatorar o número 2, então o produto de 4 e 2, que é 8, é o valor total que você fatorou:

   $8(2a - b + 5c^2)$

É legal quando você reconhece que pode fatorar um número grande, como o número 8. Portanto, se alguns passos precisarem ser seguidos, então siga.



Revisar as definições das seguintes palavras e memorizá-las pode ajudar.

- **Termo:** grupo de número(s) e/ou variável (ou variáveis) conectado um ao outro por uma multiplicação ou divisão e separado um do outro por uma adição ou subtração.
- **Fator:** quaisquer valores envolvidos em um problema de multiplicação que quando multiplicados juntos promovem um resultado.
- **Coeficiente:** número que multiplica uma variável e diz o número de variáveis.
- **Constante:** número que nunca muda de valor.

Por exemplo, na expressão $5xy + 4z - 6$, três termos são separados por sinais de mais e menos. No primeiro termo, $5xy$, três fatores são multiplicados juntos. O número 5 é normalmente chamado de coeficiente. O segundo termo tem dois fatores, 4 e z, e o terceiro termo tem apenas um, a constante.



Uma expressão pode ser escrita como o produto do maior número que divide todos os termos igualmente multiplicado pelos resultados das divisões.

$ab + ac + ad = a(b + c + d)$

Os exemplos a seguir colocam isso na prática.

- Estevão tem 6 gatos, Brad tem 18 hamsters, Carlos tem 16 periquitos, Donald tem 5 cães. Os donos dos animais de estimação querem levá-los para várias casas de repouso para visitar os moradores, mas eles querem dividir os animais em grupos similares. Como eles podem fazer isso?

  A soma dos números representando os animais é 6 + 18 + 16 + 4, cada qual podendo ser igualmente dividido por 2. Os números 6 e 18 podem ser divididos por 6, mas o 16 e o 4 não. O 16 e o 4 podem ser divididos por 4, mas o seis e o 18 não podem ser divididos por 4.

  Dois é o maior número que divide todos os números igualmente.

  Então estes cavalheiros podem levar 2 grupos de animais para as casas de repouso: 2(3 gatos + 9 hamsters + 8 periquitos + 2 cães). Que coisa legal eles estão fazendo!

- Cada um dos termos no exemplo a seguir tem um coeficiente que é divisível por três. O MDC (máximo divisor comum) dos números é três, então não existe um fator maior do que três que possa dividir todos os termos igualmente.

  Fatore $9x + 15y - 12z + 30$:

  $9x + 15y - 12z + 30 = 3(3x + 5y - 4z + 10)$

  Os termos nos parênteses são os resultados da divisão de cada termo por 3. Estes termos não têm nada em comum.

- Cada termo no exemplo a seguir é divisível por 6.

  Fatore $18a^2 - 24b - 36c + 42$

  $18a^2 - 24b - 36c + 42 = 6(3a^2 - 4b - 6c + 7)$



Primos entre si quer dizer que dois termos não têm fatores primos em comum. Se o único fator que os dois números têm em comum é o número 1, então eles são considerados *primos entre si.*

Por exemplo, 1 é o único número que divide os números 18 e 25. Embora nem o 18 e nem o 25 sejam números primos, eles são *primos entre si.*

- A maneira *apropriada* de fatorar a expressão a seguir seria escrever a fatoração de cada um dos números e procurar o MDC (máximo divisor comum). O mais prático e rápido a se fazer é procurar por um maior fator que você possa *reconhecer facilmente.* Fatore o maior fator e então veja se os números nos parênteses precisam ser fatorados novamente. Repita a divisão até que os termos nos parênteses sejam primos entre si.

  $450x + 540y - 486z + 216$

  Divida cada termo pelo número dois.

  $450x + 540y - 486z + 216 = 2(225x + 270y - 243z + 108)$

Os números nos parênteses são uma mistura de números pares e ímpares, então você não pode dividir por dois novamente. Os números nos parênteses são *todos* divisíveis por três, mas há uma opção ainda melhor.

Você deve ter notado que os dígitos dos números somam nove em todos os termos. Esta é a regra de divisibilidade por nove, então nove pode dividir cada termo igualmente. Desse modo,

$$2(225x + 270y - 243z + 108) = 2[9(25x + 30y - 27z + 12)]$$

Agora multiplique o número dois e o número nove para ter

$$450x + 540y - 486z + 216 =$$

$$18(25x + 30y - 27z + 12)$$

Você poderia ter dividido todos os termos por 18 logo no começo, mas nem todas as pessoas sabem a tabuada de 18. É um desafio até pra mim.

Fatorando variáveis

As variáveis representam valores; variáveis com expoentes representam potências desses mesmos valores. Por esta razão, as variáveis, assim como os números, podem ser fatoradas para fora dos termos em uma expressão, e neste tópico você vai descobrir como.



Ao fatorar as potências de uma variável a menor potência que aparece em qualquer um termo é o máximo que pode ser fatorado. Por exemplo, em uma expressão como $a^4 b + a^3 c + a^2 d + a^3 e^4$, a menor potência de a que aparece em qualquer termo é a segunda potência - a^2. Então você pode fatorar a^2 de todos os termos porque a^2 é o MDC, máximo divisor comum. Você não pode fatorar mais nada de nenhum dos termos.

$$a^4 b + a^3 c + a^2 d + a^3 e^4 = a^2(a^2 b + a^1 c + d + a^1 e^4)$$



Diofanto

O matemático Diofanto, o primeiro a usar símbolos para abreviar seus pensamentos sistematicamente, viveu em algum momento entre 100 e 400 d.C.. Alguns o consideram o Pai da Álgebra. O uso dos símbolos possibilitou que ele categorizasse números de tipos específicos e depois estudasse simbolicamente suas propriedades. Um dos seguidores de Diofanto resumiu a vida deste como uma charada matemática:

> Um doze avos de sua vida, depois da infância, ele deixou sua barba crescer. Depois de barbado, e mais um sétimo de sua vida, Diofanto se casou. Cinco anos depois ele teve um filho. Seu filho viveu exatamente metade que seu pai. E Diofanto morreu quatro anos depois que seu filho. Tudo isso soma o número de anos que Diofanto viveu.

Se você está muito curioso pra saber a resposta: Diofanto viveu 84 anos.



Duas verificações rápidas:

- Multiplique (distribua) a resposta na sua cabeça para ter certeza que a forma fatorada é equivalente à forma original.

  $$a^2 \times a^2b + a^2 \times ac + a^2 \times d + a^2 \times ae^4 = a^4b + a^3c + a^2d + a^3e^4$$

- Outra boa maneira para checar seu resultado visualmente é escanear os termos nos parênteses para ter certeza que eles não compartilham a mesma variável. Veja os exemplos das verificações rápidas a seguir. Finja que você acabou de fatorar o seguinte problema:

  $$x^2y^3 + x^3y^2z^4 + x^4yz = x^2y(y^2 + x^1y^1z^4 + x^2z)$$

  A sua reposta ao ser multiplicada se torna o que você tinha quando começou? Multiplique na sua cabeça:

  $x^2y \cdot y^2 = x^2y^3$ Checado!

  $x^2y \cdot xyz^4 = x^3y^2z^4$ Checado!

  $x^2y \cdot x^2z = x^4yz$ Checado!

  Estes são os três termos do problema original.

  Agora vamos para a segunda parte da verificação rápida. Veja o que está nos parênteses da sua resposta. Os dois primeiros termos têm y e o segundo tem x e z, mas nenhuma variável ocorre nos três termos. Checado!

Revelando as combinações de números e variáveis

O verdadeiro teste do processo de fatoração é combinar números e variáveis, encontrar o MDC e fatorar com sucesso. Algumas vezes você pode esquecer um ou dois fatores, mas uma segunda passada de vista pode ser feita e você não deve se envergonhar por isso ao fazer problemas algébricos. Se você faz sua fatoração em mais de um passo, não importa em qual ordem você tira os fatores. Você pode fazer os números ou variáveis primeiro. Vai dar no mesmo.

- Fatore $12x^2y^3z + 18x^3y^2z^2 - 24xy^4z^3$

  O MDC é $6xy^2z$.

  Então $12x^2y^3z + 18x^3y^2z^2 - 24xy^4z^3 = 6xy^2z(2x^1y^1 + 3x^2z^1 - 4y^2z^2)$

- Neste exemplo, o máximo divisor comum é 100. Embora as potências de a e b estejam presentes nos três primeiros termos, nenhuma delas aparece no último termo. Você está sem sorte.

  Fatore $100a^4b - 200a^3b^2 + 300a^2b^2 - 400$

  Então, fazendo a fatoração,

  $$100a^4b - 200a^3b^2 + 300a^2b^2 - 400 = 100(a^4b - 2a^3b^2 + 3a^2b^2 - 4)$$

- A expressão a seguir não pode ser fatorada. É considerada primo. Embora cada um dos números seja um múltiplo (cada um pode ser dividido por valores além dos deles mesmos), eles não têm fatores em comum. Os três termos não compartilham nada.

  Fatore $26mn^3 - 25x^2y + 21a^4b^4mnxy$

- Neste exemplo você pode ver que mesmo que você não divida pelo MDC na primeira vez, nem tudo está perdido. Uma segunda rodada resolve o problema. Em muitos casos fazer a fatoração em dois passos é mais fácil, porque os números que você divide se tornam cada vez menores e você pode fazer de cabeça.

  Fatore $484x^3y^2 + 132x^2y^3 - 88x^4y^5$

  Suponha que você determinou que o MDC da expressão neste exemplo $4x^2y$.

  Então $484x^3y^2 + 132x^2y^3 - 88x^4y^5 =$

  $4x^2y(121x^1y^1 + 33y^2 - 22x^2y^4)$.

  Olhando para a expressão dos parênteses você pode ver que cada um dos números é divisível por 11 e que tem um y em cada termo. Os termos nos parênteses têm um MDC (máximo divisor comum) de $11y$.

  $4x^2y\left[121x^1y^1 + 33y^2 - 22x^2y^4\right] =$

  $4x^2y\left[11y(11x + 3y^1 - 2x^2y^3)\right] =$

  $(4x^2y)(11y)(11x + 3y^1 - 2x^2y^3) =$

  $44x^2y^2(11x + 3y^1 - 2x^2y^3)$

  Você pode fazer toda essa fatoração ao mesmo tempo usando o MDC $44x^2y^2$, mas nem todo mundo reconhece os múltiplos de 44 quando vê um. Além disso, a fatoração poderia ter sido feita em dois ou mais passos em uma ordem diferente com os fatores diferentes de cada vez. O resultado sempre será o mesmo no final.

- Cada termo do próximo exemplo é negativo. Dividir os outros termos nos parênteses pelo negativo torna-os positivos.

  Fatore $-4ab - 8a^2b - 12ab^2 =$

  $-4ab(1 + 2a^1 + 3b^1)$



Ao fatorar um fator negativo certifique-se de trocar os sinais dos termos.

Agrupando termos

Grupos são formados quando pessoas têm algo em comum umas com as outras. Coloque 20 pessoas em uma ilha e deixe-as lá por alguns dias. A probabilidade é que as 20 pessoas passem a formar grupos à medida que procuram por pessoas com as quais podem se relacionar de alguma maneira.

O mesmo processo geral pode ser feito em fatoração. As regras são um pouco mais rígidas do que as da situação social acima, mas o princípio é o mesmo. Descubra quais são esses princípios algébricos neste tópico.

Ao usar agrupamento com um fator:

1. **Divida os termos em grupos de dois.**
2. **Procure o máximo divisor comum (MDC) em cada grupo de termos e fatore.**
3. **Reescreva a expressão com metade dos termos** (Isto é o que acontece quando você fatora: você fica com metade dos termos).
4. **Procure o MDC dos novos termos** (Se não houver um MDC para os novos termos, tente um arranjo de termos diferente nas divisões).
5. **Fatore o novo MDC.**

Veja a seguinte expressão.

$$4xy + 4xb + ay + ab$$

Você pode observar que alguns termos têm o número quatro em comum, alguns têm x em comum e alguns têm a, b, e y também. Mas não existe uma variável ou um número que seja comum aos quatro termos. De qualquer forma, eles podem ser *agrupados* em duas partes que podem ser fatorados de forma independente.

1. **Divida os termos em grupos de dois termos em cada.**

   Agrupe os dois primeiros termos e depois os dois últimos.

   $$(4xy + 4xb) + (ay + ab)$$

2. **Procure o MDC em cada grupo de termos e fatore.**

   $$4xy + 4xb = 4x(y + b)$$

   $$ay + ab = a(y + b)$$

3. **Reescreva a expressão com metade dos termos.**

   $$4x(y + b) + a(y + b)$$

4. **Procure o MDC dos novos termos.**

   O novo MDC é $y + b$.

5. Fatore o novo MDC.

$(y+b)(4x+a)$

Este negócio de agrupamento na verdade não ajuda, a não ser que os resultados das duas fatorações compartilhem alguma coisa. Olhando para a série de passos anterior, no passo 3 cada um dos grupos fatorados tem $(y+b)$. Quando isso acontece o $(y+b)$ pode ser fatorado dos novos termos formados.

$$4x(y+b)+a(y+b)=(y+b)(4x+a)$$

Esta é a forma fatorada. Se você multiplicar (distribuir) os termos vai ter os quatro termos com os quais começou a trabalhar.

Novamente o exemplo a seguir não tem nada compartilhado por todos os termos. Mas se você agrupar os dois primeiros e os dois últimos, você pode fatorar os dois pares.

Fatore $ax^2y-3a+9x^2y-27$

1. Divida os termos em agrupamentos iguais de dois termos.

$(ax^2y-3a)+(9x^2y-27)$

2. Procure o MDC de cada agrupamento de termos e fatore.

$(ax^2y-3a)=a(x^2y-3)$

$(9x^2y-27)=9(x^2y-3)$

3. Reescreva a expressão com metade dos termos.

$a(x^2y-3)+9(x^2y-3)$

4. Procure o MDC dos novos termos.

O novo MDC é x^2y-3

5. Fatore o novo MDC.

$a(x^2y-3)+9(x^2y-3)=(x^2y-3)(a+9)$

O que acontece se os termos não estiverem nessa ordem? Como você sabe em qual ordem escrevê-los? Você teria uma resposta diferente? Bem, misture os termos e escreva o problema como $ax^2y+9x^2y-27-3a$ e veja o que você tem.

Os dois primeiros termos têm um MDC de x^2y, os dois termos seguintes têm um MDC de - 3, o agrupamento e a fatoração te dão $x^2y(a+9)-3(9+a)$.

As expressões nos parênteses não parecem ser exatamente iguais, mas a adição é *comutativa* – você pode somar em qualquer ordem e ter o mesmo resultado. Você pode inverter o 9 e o a no último fator para que seja o mesmo do primeiro.

$$x^2y(a+9)-3(a+9)$$

Agora você pode fatorar o $(a + 9)$ de cada termo para finalizar o problema.

$$(a+9)(x^2y-3)$$

Os dois fatores nesta resposta estão invertidos em relação ao primeiro modo como você realizou o problema, mas a multiplicação é também comutativa.

Neste último exemplo, note que os dois pares de termos podem ser agrupados e fatorados.

Fatore $4ab^2 - 8ac^2 + 5x^2b - 10x^2c =$

$$(4ab^2 - 8ac^2) + (5x^2b - 10x^2c) =$$

$$4a(b^2 - 2c^2) + 5x^2(b - 2c)$$

As expressões nos parênteses parecem iguais, mas não são. Mudar a ordem não vai ajudar neste caso. Agora temos dois termos, mas eles não têm um fator em comum. Esta expressão é o mais simples possível. Em outras palavras, é primo (no sentido algébrico).

Capítulo 10

Entendendo o segundo grau

Neste capítulo:

- Endireitando-se com as expressões quadráticas
- Descobrindo como distribuir duplamente sem frustração
- Fazendo o processo de distribuição dupla ao contrário
- Organizando-se para fatorar uma expressão quadrática

Expressões quadráticas (de segundo grau), do tipo $3x^2 - 12$, ou $-16t^2 + 32t + 11$ são extensivamente estudadas em álgebra porque têm muitas aplicações nas matérias de cálculo e física, assim como em outras disciplinas. São chamadas *expressões* porque são formadas por dois ou mais termos com os sinais de mais (+) ou menos (-) entre eles. Se houvesse um sinal de igual seriam equações. A boa notícia é que elas são

Expressões quadráticas têm uma variável específica elevada à segunda potência. Uma expressão quadrática pode ter um ou mais termos, e nem todos os termos possuem uma variável ao quadrado, mas pelo menos um deles tem que ter um expoente com o número dois. Além disso, uma expressão quadrática não pode ter nenhuma potência maior do que

Algumas expressões quadráticas podem ter uma variável, como em $2x^2 - 3x + 1$.
Outras podem ter duas ou mais variáveis, como em $2\pi r^2 + 2\pi rh$. Todas

A expressão quadrática padrão



Uma expressão quadrática padrão, ou de segundo grau, tem uma variável que está elevada ao quadrado e nenhuma variável com potências maiores do que dois em nenhum dos termos. Onde a não é

$$ax^2 + bx + c$$

Talvez você consiga notar nos exemplos a seguir expressões quadráticas com uma variável elevada ao quadrado. Não há potência maior do que 2 em nenhum dos termos.

$$4x^2 + 3x - 2$$

$$a^2 + 11$$

$$6y^2 - 5y$$



Normalmente essas expressões são escritas com variáveis x, y, z ou w. As letras do final do alfabeto são usadas mais freqüentemente para uma variável, enquanto as do começo do alfabeto são normalmente usadas para um número ou constante. Este não tem que ser o caso, mas é *geralmente* o caso.

Em uma expressão quadrática, o a – a constante da expressão padrão, ax^2+bx+c – não pode ser zero. Se a pudesse ser 0, então o x^2 seria multiplicado por zero e não seria mais uma expressão quadrática. As variáveis b e c podem ser 0, mas a não.

As equações quadráticas também não têm que, necessariamente, ter todos os termos positivos. A forma padrão, $ax^2 + bx + c$, é escrita com termos positivos por conveniência. Mas se a, b ou c representarem um número negativo, então o termo será negativo.



Os termos geralmente são escritos com o termo em segundo grau primeiro, o termo em primeiro grau depois e o número por último.

Expressões quadráticas que você conhece

Você provavelmente já deve estar familiarizado com algumas dessas expressões e equações quadráticas:

- $E = mc^2$: Einstein disse isso primeiro! Essa equação tem apenas um termo porque isto era tudo que o velho Einstein precisava. O E significa energia, m para a massa e o c é uma constante, representando a velocidade da luz.
- $A = l^2$: Você provavelmente usou esta equação no primeiro grau. A área do quadrado é encontrada quando elevamos o valor de seu lado ao quadrado. O A representa a área e o l o lado.
- $a^2 + b^2 = c^2$: Este é a famosa contribuição de Pitágoras para o entendimento do triângulo retângulo. As letras a e b representam os dois lados menores – os catetos – no triângulo retângulo e c representa a hipotenusa – o lado maior.
- $A = \pi r^2$: Esta fórmula é usada para achar a área de um círculo. Quem acha "Pierre quadrado" é cego, Pierre é redondo, ele é muito gordo! Desculpa, não resisti.[1]

Estas são apenas algumas das mais famosas expressões e equações quadráticas. Se você cruzar com elas em problemas da vida real, talvez tenha que fatorá-las para poder resolver equações ou responder questões envolvendo essas expressões.



Se uma expressão tem mais de uma variável, decida qual variável é responsável por torná-la uma expressão quadrática (procure a variável elevada ao quadrado), e escreva a expressão em termos dessa variável. Isto quer dizer que depois de achar a variável elevada ao quadrado você deve escrever o resto da expressão em ordem decrescente de potências da variável.

$$aby + cdy^2 + ef$$

Esta pode ser uma expressão de segundo grau em y. Escrita na forma padrão $ax^2 + bx + c$, na qual o termo ao quadrado vem primeiro, ela se parece com

$$(cd)y^2 + (ab)y + ef$$

Os parênteses não são necessários no caso anterior e não mudam nada, mas são usados de vez em quando para enfatizar algo. Os parênteses tornam mais simples a visualização das diferentes partes da expressão.

Aqui está um exemplo no qual você pode fazer escolhas.

$$a^2bx + cdx^2 + aef$$

Esta pode ser uma expressão de segundo grau em a ou x.

Segundo grau em a: $(bx)a^2 + (ef)a + cdx^2$

Mesmo tendo um fator de segundo grau em x no último termo, esse termo é considerado uma constante, um valor que não muda, ao invés de uma variável se a expressão é de segundo grau em a.

Agora, mudando as posições, o segundo grau em x: $(cd)x^2 + (a^2b)x + aef$.

Retendo os números grandes

Algumas das maravilhosas expressões quadráticas são muito complicadas de lidar. Algumas podem ficar mais fáceis de resolver através da fatoração. Algumas, simplesmente, continuam sem cooperar – e você ficará grudado nelas. Neste tópico volto ao meu assunto favorito: encontrar o máximo divisor comum. Se os termos da expressão quadrática têm algo em comum, então eles podem ser fatorados. Desta forma, teremos algo mais razoável com que lidar.

- A seguinte expressão quadrática pode se tornar mais útil se conseguirmos encontrar o fator comum e colocar o resultado em uma expressão mais organizada.

  $$800x^2 + 40{,}000x - 100{,}000$$

A expressão tem números grandes, mas cada número pode ser dividido de maneira exata por 800, que é o fator comum.

$800x^2 + 40{,}000x - 100{,}000 =$

$800(x^2 + 50x - 125)$

- A operação quadrática a seguir tem quatro variáveis diferentes com potência de dois. De qualquer forma, somente o x aparece em um termo com a potência um. Então, você talvez escolha escrever como forma de uma expressão quadrática em x e fatorar algumas das outras variáveis.

  $a^2x^2 + a^2c^2 + a^2b^2x$

  Reescreva a expressão em ordem decrescente das potências de x.

  $a^2x^2 + a^2b^2x + a^2c^2$

  Encontre o MDC, que é a^2, e fatore.

  $a^2(x^2 + b^2x + c^2)$

Multiplicando binômios (PEIU)

O que é (PEIU)?

Alternativas:

a) Uma palavra em Tupi que significa "assoprar"

b) Um erro de digitação na palavra "pediu"

c) Um acrônimo para primeiro, externo, interno e último. Em Inglês (FOIL)

Letra C é a minha resposta final. FOIL é um acrônimo que surgiu em algum lugar durante meus anos de colégio e de ensino. No começo era meio que debaixo da mesa. Matemáticos respeitados não queriam usá-lo. Mas tornou-se popular e agora é aceito, publicado e usado extensivamente nas aulas de álgebra. FOIL é fácil de lembrar e usar.

Linguagem algébrica

Da mesma forma que a frase "uma montanha de feijões" não tem verbo na língua inglesa, uma expressão algébrica, do tipo $6x^2 + 11$ não tem um sinal de igual. Nem a frase e nem a expressão algébrica fazem nenhuma afirmação.

Por outro lado, uma sentença ou equação algébrica faz uma afirmação. Uma sentença deve conter um verbo, que é similar ao sinal de igual em uma equação algébrica. Por exemplo, você pode dizer que 6 + 3 é 9, ou em uma sentença como "O carro vale $15.000", você pode ter uma afirmativa verdadeira ou falsa, dependendo a qual carro você está se referindo. Uma sentença matemática ou uma equação, como $6x - 1y = 11$, fazem uma afirmação. A veracidade da afirmação vai depender do que o x e o y são.

Este capítulo é sobre fatoração, antes você precisa saber como multiplicar dois binômios usando PEIU. O Capítulo 8 mostra como multiplicar dois binômios pela distribuição, mas este capítulo te mostrará um método alternativo.

O básico do PEIU

Muitas expressões quadráticas, como $6x^2 + 7x - 3$, são o resultado da multiplicação de dois binômios (dois termos separados por adição ou subtração), então você pode desfazer a multiplicação fatorando os termos.

$$6x^2 + 7x - 3 = (2x + 3)(3x - 1)$$

O lado direito é a forma *fatorada*. Mas como poderíamos dizer que o lado esquerdo da equação é igual ao lado direto apenas observando a expressão? Não é como no caso do máximo divisor comum, no qual você procura por algo em comum.

O que quer dizer PEIU? Cada uma das letras se refere a dois termos – uma para cada um dos dois binômios – multiplicados juntos e em determinada ordem. Os passos não precisam ser feitos nessa ordem, mas normalmente são. Caso contrário o acrônimo seria algo do tipo EPIU. A seguinte lista descreve o que cada letra significa no acrônimo PEIU:

- **P** representa o primeiro termo de cada binômio: $(\mathbf{3a} + 6)(\mathbf{2a} - 1)$
- **E** representa os dois termos mais externos – os dois mais longe para a esquerda e para a direita: $(\mathbf{3a} + 6)(2a - \mathbf{1})$
- **I** representa os termos do meio: $(3a + \mathbf{6})(\mathbf{2a} - 1)$
- **U** representa o último termo de cada binômio: $(3a + \mathbf{6})(2a - \mathbf{1})$

Em cada binômio há o termo da esquerda e o termo da direita. Mas os dois termos também podem ter outros nomes (assim como alguém chamado Michael pode ser "Mike" para uma pessoa e "filho" para outra). Os outros nomes dos termos dos binômios se referem as suas posições em relação à equação. Os dois termos (que não estão no meio) são os termos externos. Os dois termos no meio são os termos *internos*. Use isto como exemplo: $(a + b)(c + d)$, os termos a e c são os primeiros; os termos b e d são os últimos em cada binômio; Os termos a e d são os externos; os termos b e c são os internos em relação à equação geral. Como você pode ver, todos os termos têm dois nomes. No problema $(2x + 3)(3x - 1)$ o termo $2x$ é chamado de primeiro e externo, e está tudo certo.

A figura 10-1 dá uma visão de como isso é feito.

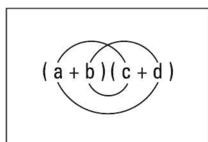


Figura 10-1: A carinha feliz do PEIU

Fazendo o PEIU de novo, e de novo

Os passos a seguir demonstram como usar o PEIU em um problema de multiplicação: $(2x + 3)(3x - 1)$.

1. **Multiplique os primeiros termos de cada binômio.**

   $(2x + 3)(3x - 1)$

   $(2x)(3x) = 6x^2$

2. **Multiplique os termos externos.**

   $(2x + 3)(3x - 1)$

   $(2x)(-1) = -2x$

3. **Multiplique os termos internos.**

   $(2x + 3)(3x - 1)$

   $(3)(3x) = 9x$

4. **Multiplique junto o último termo de cada expressão.**

   $(2x + 3)(3x - 1)$

   $(3)(-1) = -3$

5. **Liste os quatro resultados do PEIU em ordem.**

   $6x^2 - 2x + 9x - 3$

6. **Combine os termos iguais.**

   $6x^2 + 7x - 3$

Distribuindo os dois termos do primeiro binômio pelos termos do segundo, teremos o mesmo resultado. Mas no caso de binômios, usar o FOIL é mais fácil. Para mais informações sobre distribuição veja o Capítulo 8.

Veja como os passos numerados do PEIU funcionam em alguns termos negativos no exemplo a seguir.

$(x - 3)(2x - 9)$

1. **Multiplique os primeiros termos.**

   $(x)(2x) = 2x^2$

2. **Multiplique os termos externos.**

   $(x)(-9) = -9x$

3. **Multiplique os termos internos.**

   $(-3)(2x) = -6x$

4. **Multiplique os últimos termos.**

   $(-3)(-9) = 27$

5. **Liste os quatro resultados do PEIU em ordem.**

   $2x^2 - 9x - 6x + 27$

6. **Combine os termos iguais.**

   $2x^2 - 15x + 27$

O exemplo a seguir é um pouquinho mais complicado de se fazer, mas o PEIU pode torná-lo mais fácil. As tarefas foram repartidas em tarefas menores e mais simples e, então, os resultados são combinados para o resultado final.

Os próximos passos levam você através de $[x + (y - 4)][3x + (2y + 1)]$.

1. **Multiplique os primeiros termos.**

   $(x)(3x) = 3x^2$

2. **Multiplique os termos externos.**

   $(x)(2y + 1) = 2xy + x$

3. **Multiplique os termos internos.**

   $(y - 4)(3x) = 3xy - 12x$

4. **Multiplique os últimos termos. Estes são, também, dois binômios. Você faz o PEIU desses binômios quando terminar a série de passos deste PEIU.**

   $(y - 4)(2y + 1)$

5. **Liste os quatro resultados do PEIU em ordem.**

   $3x^2 + 2xy + x + 3xy - 12x + (y - 4)(2y + 1)$

6. **Combine os termos iguais.**

   $3x^2 + 5xy - 11x + (y - 4)(2y + 1)$

Note o produto dos dois binômios resultantes do passo 4: $(y - 4)(2y + 1)$. Você pode fazer o PEIU deles.

1. **Multiplique os primeiros termos:** $(y)(2y) = 2y^2$

2. **Multiplique os termos externos:** $(y)(1) = y$

3. **Multiplique os termos internos:** $(-4)(2y) = -8y$

4. **Multiplique os últimos termos:** $(-4)(1) = -4$
5. **Escreva os resultados em ordem:** $2y^2 + y - 8y - 4$
6. **Combine termos iguais:** $2y^2 - 7y - 4$

   Agora substitua os dois binômios multiplicados juntos por este novo resultado e reescreva todo o problema.

   $3x^2 + 5xy - 11x + 2y^2 - 7y - 4$

Isso pode parecer complicado, mas usar o PEIU é mais fácil do que fazer toda a distribuição. Você se lembra da regra para multiplicar a soma de quaisquer dois termos pela diferença? Se sua resposta for "sim", então pule este problema, se dê um abraço e vá para frente da sala. Se sua resposta for "não", então apenas se dê um tapinha nas costas e continue lendo.

A soma de dois termos multiplicada pela diferença dos mesmos dois termos (veja a operação a seguir) é uma operação simples. Isso porque os termos do meio podem ser cancelados, já que possuem o mesmo valor absoluto e um é positivo e o outro negativo.

$$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

A operação a seguir multiplica a soma e a diferença dos mesmos dois valores. No Capítulo 8 eu mostro como os termos do meio se cancelam ou desaparecem. Isto é bem mais evidente com o PEIU.

$(5x - 3)(5x + 3)$

1. **Multiplique os primeiros termos:** $(5x)(5x) = (5x)^2 = 25x^2$
2. **Multiplique os termos externos:** $(5x)(3) = 15x$
3. **Multiplique os termos internos:** $(-3)(5x) = -15x$
4. **Multiplique os últimos termos:** $(-3)(+3) = -9$
5. **Escreva os resultados em ordem:** $25x^2 + 15x - 15x - 9$
6. **Combine termos iguais: os produtos, $15x$ e $-15x$ são opostos. O primeiro e o último produto são tudo o que resta.**

   $25x^2 - 9$

Dê uma olhada nas operações quadráticas que seguem. Elas são bons exemplos de diferença de dois quadrados e PEIU?

$(3x + 2)(3x - 2) = 9x^2 - 4$

$(2z - m)(2z + m) = 4z^2 - m^2$

$(m^2 - n^2)(m^2 + n^2) = m^4 - n^4$



Carl Friedrich Gauss, criança prodígio

O matemático Carl Friedrich Gauss, uma criança prodígio, tinha apenas três anos quando corrigiu alguns cálculos nas listas de pagamentos de seu pai. E, posteriormente, ele continuou fazendo contribuições significantes para a matemática.

Diz a lenda que quando Gauss ainda era um estudante, seu exausto professor mandou a turma achar a soma dos números de 1 a 100 na tentativa de mantê-los ocupados e descansar um pouco. Momentos depois, o pequeno Carl Friedrich estava no ombro do professor com uma resposta. O professor olhou incrédulo para a resposta do garoto que, obviamente, estava correta. Gauss não era um gênio da adição, ele apenas se organizou e achou padrões nos números para tornar a soma mais fácil e muito mais interessante. Ele viu que 1 + 99 = 100, 2 + 98 = 100, 3 + 97 = 100, e assim sucessivamente. A soma de 49 desses 100s, o 50 no meio e o 100 no final seria, então, 5.050.

Graças a Gauss, uma fórmula padrão está disponível para a soma de qualquer lista de números inteiros consecutivos. A fórmula é $S = n(n + 1) \div 2$. O S representa a soma dos números e n é o maior, ou o último, número na lista que começa com o número um.

Fatoração por Soma e Produto (desfazendo o PEIU)

Quando olha para a expressão do tipo $2x^2 - 5x - 12$, você talvez pense que descobrir como fatorar a expressão no produto de dois binômios seja uma tarefa difícil. E você talvez se pergunte se ela pode realmente ser fatorada dessa maneira. Deixe-me afirmar que esses problemas são, na verdade, muito fáceis.

Uma coisa boa é que existe um sistema que torna a fatoração por agrupamento muito simples. Você segue o sistema e ele te ajuda a descobrir a resposta, ou te ajuda a determinar se não existe uma resposta. Isto não pode ser dito sobre todos os problemas de fatoração, mas é verdade para as expressões quadráticas na forma $ax^2 + bx + c$. É por isso que as expressões quadráticas são tão legais de trabalhar em álgebra.

A chave para desfazer o PEIU, nesses problemas de fatoração, está sendo organizada.

- **Tenha certeza de que você tem uma expressão na forma** $ax^2 + bx + c$.
- **Tenha certeza de que os termos estão escritos na ordem decrescente das potências.**
- **Caso seja necessário, reveja as listas de números primos e de quadrados perfeitos (veja a folha de consulta para os dois tópicos).**
- **Siga os passos sugeridos.**



Siga esses passos para fatorar a expressão quadrática $ax^2 + bx + c$, que está escrita na ordem decrescente das potências, desfazendo o PEIU.

1. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar *a*.**

   Cada número pode ser escrito como, pelo menos, um produto, mesmo se seja apenas o número multiplicado por um. Então suponha que existam dois números, *e* e *f*, cujo produto é igual a *a*: $a = e \cdot f$. Estes são os dois números que você quer para esse problema.

2. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar *c*.**

   Se o valor de *c* é negativo, ignore o sinal negativo por enquanto. Concentre-se em quais fatores resultam no valor absoluto de *c*. Agora suponha que há dois números, *g* e *h*, cujo produto é igual a *c*: $c = g \cdot h$. Use esses dois números para esse problema.

3. **Agora olhe o sinal de c e suas listas para os passos 1 e 2.**

   1. Se *c* é positivo, encontre um valor da lista do Passo 1 e outro valor da lista do Passo 2 tal que a soma do seu produto e o produto dos dois números restantes seja igual a *b*.

      Suponha que, usando $e \cdot f$ e $g \cdot h$, você tenha $e \cdot g + f \cdot h = b$.

   2. Se *c* é negativo, encontre um valor da lista do Passo 1 e outro valor da lista do Passo 2 tal que a diferença do seu produto e o produto dos dois números restantes seja igual a *b*.

      Suponha que, usando $e \cdot f$ e $g \cdot h$, você tenha $e \cdot g - f \cdot h = b$.

4. **Organize suas escolhas na forma de binômios.**

   O *e* e o *f* têm que estar nas *primeiras* posições nos binômios e o *g* e o *h* têm que estar nas últimas posições. Eles têm que ser organizados para que a multiplicação no Passo 3 tenha os produtos *externos* e *internos* corretos.

   $(e \quad h)(f \quad g)$

5. **Coloque os sinais apropriadamente.**

   Os sinais são ambos positivos se *c* for positivo e *b* for positivo.
   Os sinais são ambos negativos se *c* for positivo e *b* for negativo.
   Um sinal é positivo e outro é negativo se *c* for negativo; a escolha depende se *b* é positivo ou negativo e de como você organiza os fatores.

Fatorando por Soma e Produto, siga esses passos para fatorar a expressão quadrática $2x^2 - 5x - 12$, que está na forma $ax^2 + bx + c$ e escrita na ordem decrescente das potências.

1. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar *a*.**

   Você pode achar esses números da fatoração em números primos de *a*. veja o Capítulo 7 se você precisar revisar fatoração em números primos.



   Números primos são somente divididos por eles mesmos e por um. Fatoração em números primos é encontrar os números primos que dividem qualquer valor dado.

Algumas vezes, escrever a lista de maneiras de multiplicar é uma grande ajuda.

No exemplo $2x^2 - 5x - 12$, o valor de a é 2. A única maneira de multiplicar dois números para ter 2 como resposta é 1×2.

2. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar *c*.**

   De novo, nos referindo ao exemplo $2x^2 - 5x - 12$, o valor de c é -12. Ignore o sinal negativo agora, ele se tornará importante no próximo passo. Apenas se concentre nos números que multiplicados juntos têm como resposta 12.

   Existem três maneiras de multiplicar dois números para ter 12. Elas são: 1×12, 2×6 e 3×4.

3. **Olhe o sinal de *c* e as listas dos passos 1 e 2.**

   1. Se c é positivo, encontre um valor da lista do Passo 1 e outro valor da lista do Passo 2 tal que a soma do seu produto e o produto dos dois números restantes seja igual a b.
   2. Se c é negativo, encontre um valor da lista do Passo 1 e outro valor da lista do Passo 2 tal que a diferença do seu produto e o produto dos dois números restantes seja igual a b.

4. **Escolha um produto do Passo1 e um produto do Passo 2.**

   No caso do exemplo, c é -12 e b é 5. Então, procure uma combinação do Passo 1 e do Passo 2 cuja diferença tenha como resultado 5.

   Use o 1×2 do Passo 1 e o 3×4 do Passo 2. Multiplique o número 1 do Passo 1 pelo número 3 do Passo 2 e depois multiplique o número 2 do Passo 1 pelo número 4 do Passo 2.

   $$(1)(3) = 3 \text{ e } (2)(4) = 8$$

   Os dois produtos são 3 e 8, cuja diferença é 5.

   $$8 - 3 = 5.$$

5. **Organize suas escolhas na forma de binômios para que os resultados possam ser os esperados.**

   Do exemplo, os seguintes arranjos multiplicam $(1x)$ $(2x)$ para ter o $2x^2$ necessário para o primeiro produto. Da mesma forma, o 4 e o 3 são multiplicados para te dar 12. O produto externo é 3x e o produto interno é $8x$.

   $$(1x\ 4)(2x\ 3)$$

6. **Coloque os sinais para ter os resultados desejados.**

   $$(1x - 4)(2x + 3) = 2x^2 - 5x - 12$$

O próximo exemplo, $24x^2 - 34x - 45$, oferece muitos números para escolher.

1. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar *a*.**

   a é 24, que é igual a 1×24, 2×12, 3×8 ou 4×6.

2. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar *c*.**

   c é 45, que é igual a 1×45, 3×15 ou 5×9.

3. **Olhe o sinal de *c* e suas listas do Passo 1 e do Passo 2 para ver se você quer uma soma ou uma subtração.**

   c é negativo, então você quer uma *diferença* de 34 entre os produtos.

4. **Escolha um produto do Passo1 e um produto do Passo 2.**

   Use o 4×6 de a e o 5×9 de c. O produto de 4 e 5 é 20, o produto de 6 e 9 é 54, a diferença desses produtos é 34.

5. **Organize suas escolhas na forma de binômios para que os resultados possam ser os esperados.**

   $(4x \quad 9)(6x \quad 5)$

6. **Coloque os sinais para ter os resultados desejados.**

   $(4x - 9)(6x + 5) = 24x^2 - 34x - 45$

As combinações que você quer talvez não apareçam tão claramente, mas ter uma lista de todas as possibilidades pode ajudar muito. Você pode começar tentando sistematicamente combinações diferentes. Por exemplo, pegue o 1×24 e tente com todos os três grupos de números que te dão c: 1×45, 3×15 ou 5×9. Se nenhum deles funcionar tente o 2×12 com todos os grupos de números que te dão c. Continue até que você passe sistematicamente por todas as combinações possíveis. Se nenhuma delas funcionar, você saberá que já tentou de tudo. Ao proceder desta forma, você terá certeza que não se esqueceu de nada.

No exemplo a seguir, $2x^2 - 9x + 4$, a soma dos números externos e dos internos é usada

1. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar *a*.**

   a é 2, que só pode ser 1×2.

2. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar *c*.**

   c é 4, que é igual a 1×4, 2×2.

3. **Olhe o sinal de c e suas listas do Passo 1 e do Passo 2 para ver se você quer uma soma ou uma subtração.**

   c é positivo, então você quer a soma dos produtos dos números externos e internos.

4. **Escolha um produto do Passo1 e um produto do Passo 2.**

   Usando os fatores 1×2 e 1×4, multiplique (2) (4) para ter 8, e multiplique os dois números um para ter 1. A soma de 8 e do 1 é igual a 9.

5. **Organize suas escolhas na forma de binômios para que os resultados possam ser os esperados.**

   $(2x \quad 1)(1x \quad 4)$

6. **Coloque os sinais para ter os resultados desejados.**

   $(2x - 1)(1x - 4) = 2x^2 - 9x + 4$

No próximo exemplo, $10x^2 + 31x + 15$, todos os termos são positivos. A soma dos produtos dos números externos e internos será usada. E existem várias opções para os multiplicadores.

1. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar a.**

   O número 10 pode ser escrito como 1×10 ou 2×5.

2. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar c.**

   O número 15 pode ser escrito como 1×15 ou 3×5.

3. **Olhe o sinal de c e suas listas do Passo 1 e do Passo 2 para ver se você quer uma soma ou uma subtração.**

   O último termo é positivo, então você quer que a soma dos produtos seja 31.

4. **Escolha um produto do Passo1 e um produto do Passo 2.**

   Usando o 2×5 e o 3×5, multiplique (2) (3) para ter 6 e multiplique (5) (5) para ter 25. A soma de 6 com 25 é igual a 31.

5. **Organize suas escolhas na forma de binômios para que os resultados possam ser os esperados.**

   $(2x \quad 5)(5x \quad 3)$

6. **Coloque os sinais para ter os resultados desejados.**

   $$(2x + 5)(5x + 3) = 10x^2 + 31x + 15$$

Este último exemplo, $18x^2 - 27x - 4$, à primeira vista, aparenta ser um ótimo candidato a fatoração através deste método. Você verá, então, que nem tudo pode ser fatorado. Também, outro ponto poderá ser observado: usar esse método assegura que você tentou de tudo.

1. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar a.**

   O número 18 pode ser escrito como 1×18 ou 2×9 ou 3×6.

2. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar c.**

   O número 4 pode ser escrito como 1×4 ou 2×2.

3. **Olhe o sinal de c e suas listas do Passo 1 e do Passo 2 para ver se você quer uma soma ou uma subtração.**

   O último termo é negativo, então você quer que a diferença dos produtos seja 27.

4. **Escolha um produto do Passo1 e um produto do Passo 2.**

   Parece que você não consegue achar uma combinação que te dê uma diferença de 27. Olhe de novo para ter certeza de que não passou despercebido por nada.

Usando o 1×18 e combinando com:

1×4, dá uma diferença de 14, usando o (1) (4) e (18) (1) ou 71 usando o (1) (1) e o (18) (4).

2×2, dá uma diferença de 34 usando o (1) (2) e (18) (2); há apenas uma opção porque os dois segundos fatores são o número 2.

Usando o 2×9 e combinando ele com:

1×4, dá uma diferença de 34, usando o (2) (1) e (9) (4) ou 1 usando o (2) (4) e o (9) (1).

2×2, dá somente uma diferença de 6.

Por terem se esgotado todas as possibilidades sem que você tenha conseguido criar uma diferença igual a 27, você pode supor que essa expressão quadrática não pode ser fatorada. Ela é primo.

Fatorando diversas expressões

Algumas vezes você tem que fatorar um problema mais de uma vez. Este tópico mostra como duas técnicas de fatoração completamente diferentes podem ser usadas no mesmo problema. O processo de usar técnicas de fatoração distintas é diferente de reusar os mesmos métodos, como por exemplo, achar os fatores comuns diversas vezes.

Uma expressão quadrática como, por exemplo, $40x^2 - 40x - 240$ pode ser fatorada através do uso de duas técnicas diferentes. Estas técnicas podem ser feitas em duas ordens diferentes, tornando o problema *mais fácil* ou *mais difícil*. Assim, é a ordem na qual a fatoração é feita que torna uma maneira mais fácil e outra mais difícil.

Primeiro vou mostrar a você o método mais difícil, para que você veja porque é importante fazer uma boa escolha. Neste caso, os números grandes são deixados no problema e a fatoração por agrupamento (desfazer o FOIL) é feita antes.

1. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar a.**

   O número 40 pode ser escrito como 1×4, 2×2, 4×10 ou 5×8.

2. **Determine todas as maneiras que você pode multiplicar dois números para achar c.**

   O número 240 pode ser escrito como 1×240, 2×120, 3×80, 4×60, 5×48, 6×40, 8×30, 10×24 ou 12×20.

3. **Olhe o sinal de c e suas listas do Passo 1 e do Passo 2 para ver se você quer uma soma ou uma subtração.**

   O último termo é negativo, então você quer que a diferença dos produtos seja 40.

   Use o 4×10 e o 12×20, multiplique (4) (20) para ter 80 e multiplique (12) (10) para ter 120. A diferença entre 80 e 120 é 40.

4. **Organize suas escolhas na forma de binômios e coloque os sinais apropriadamente.**

   $$(4x - 12)(10x + 20) = 40x^2 - 40x - 240$$

   Observe bem esses binômios. Cada um deles pode ser fatorado. Os termos no primeiro binômio podem ser fatorados por 4 e os termos no segundo binômio podem ser fatorados por 10.

   $$(4x - 12)(10x + 20) = 4(x - 3)10(x + 2) = 40(x - 3)(x + 2)$$

Depois tente a maneira mais fácil: fatore primeiro o máximo divisor comum (MDC).

$$40x^2 - 40x - 240 = 40(x^2 - x - 6)$$

1. **Olhe para dentro dos parênteses.**

   O número 1 só pode ser escrito como 1×1. O número 6 pode ser escrito como 1×6 ou 2×3. Note que a lista de escolhas é bem menor e mais simples do que se você tentasse desfazer o PEIU antes de fatorar o MDC.

2. **Olhando para o sinal de c, escolha os seus produtos.**

   O último termo é negativo, então você quer que a diferença dos produtos seja 1. Usando o 1×1 e o 2×3 é fácil de montar os fatores:

   $$(1x \quad 2)(1x \quad 3)$$

   O termo do meio, x, é negativo, então você quer que o $3x$, os termos externos, seja negativo. Coloque o 40 que você fatorou de volta a resposta e em primeiro lugar.

   $$40x^2 - 40x - 240 = 40(x + 2)(x - 3)$$

Você pode achar a resposta correta independente daquilo que você escolha fazer e em que ordem você o faça. Como regra geral, no entanto, é melhor fatorar primeiro o MDC.

Capítulo 11

Fatorando casos especiais

Neste capítulo:

Reduzindo cubos perfeitos

Resolvendo a diferença de dois quadrados

Somando dois cubos perfeitos

Colocando polinômios com muitos termos em ordem

Este capítulo tem algumas úteis informações sobre fatoração que não pertencem às regras de fatoração linear ou quadrática. Você talvez queira dar uma olhada nos Capítulos 9 e 10 para verificar mais regras e dicas de fatoração. Metade do processo de fatoração se constitui em saber as regras e a outra metade em reconhecer quando usar qual regra. Essas são habilidades igualmente importantes, e você precisa das duas.

Combinando binômios

Se uma expressão binomial (dois termos) pode ser fatorada de alguma maneira, ela deve ser fatorada de uma das quatro maneiras possíveis. Primeiro, olhe o sinal de adição ou subtração que sempre separa os dois termos do binômio. Depois olhe os dois termos. Eles são quadrados? São cubos? Eles são especiais de alguma maneira? O bom de ter dois termos em uma expressão é que você tem quatro (e apenas quatro) maneiras para verificar.



As quatro maneiras de se fatorar um binômio são:

- Encontrar o máximo divisor comum (MDC)
- Fatorar a diferença de dois quadrados perfeitos
- Fatorar a diferença de dois cubos perfeitos
- Fatorar a soma de dois cubos perfeitos

Quando você tem um problema de fatoração com dois termos, você pode olhar a lista e ver qual maneira funciona melhor. Algumas vezes os dois termos podem ser fatorados em mais de uma maneira, como achar o MDC e a

diferença de dois quadrados. Depois de examinar um método de fatoração, cheque dentro dos parênteses para ver se outra fatoração pode ser feita. Se você checou cada item na lista de maneiras para fatorar e nenhuma funcionou, então você sabe que a expressão *não pode* ser fatorada. Você pode parar de procurar e dizer que terminou.

Encontrar o máximo divisor comum (MDC) é sempre a opção mais fácil e rápida de examinar ao fatorar (para mais informação sobre como encontrar o MDC, veja o Capítulo 9). O que resta depois da fatoração é mais fácil de lidar. Mas leia os tópicos a seguir para descobrir outras pérolas da fatoração.

Fatorando a diferença de dois quadrados perfeitos

Se dois termos em um binômio são quadrados perfeitos e eles são separados por uma subtração, então eles podem ser fatorados. Um quadrado perfeito *não* é uma referência para aquela parceira de baile de formatura com dois pés esquerdos que se nega a dançar o tempo todo. Um *quadrado perfeito* é o resultado da multiplicação de um número por ele mesmo. Vinte e cinco é um quadrado perfeito porque é igual a cinco vezes cinco. Para fatorar um desses binômios, apenas encontre a raiz quadrada dos dois termos que são quadrados perfeitos e escreva a fatoração como a soma e a diferença de duas raízes quadradas. Por exemplo, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. No entanto, olhando outro exemplo, o binômio $x^2 + 3$ não é a diferença de dois quadrados perfeitos porque tem um sinal de mais, e não de menos, e o número 3 não é um quadrado perfeito.



Se uma subtração separa dois termos ao quadrado, então a soma e a diferença das duas raízes quadradas fatoram o binômio.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

- Fatore $9x^2 - 16$. As raízes quadradas de $9x^2$ e 16 são $3x$ e 4, respectivamente. A soma das raízes quadradas é $3x + 4$ e a diferença entre as raízes é $3x - 4$. Então, $9x^2 - 16 = (3x + 4)(3x - 4)$.
- Fatore $25z^2 - 81y^2$. As raízes quadradas de $25z^2$ e $81y^2$ são $5z$ e $9y$, respectivamente. Então, $25z^2 - 81y^2 = (5z + 9y)(5z - 9y)$.
- Fatore $x^4 - y^6$. As raízes quadradas de x^4 e y^6 são x^2 e y^3, respectivamente. Então, $x^4 - y^6 = (x^2 + y^3)(x^2 - y^3)$.
- Fatore $x^2 - 3$. Neste caso, o segundo número não é um quadrado perfeito. Mas, de qualquer jeito, algumas vezes é preferível ter a expressão fatorada. A raiz quadrada de x^2 é x, e você pode escrever a raiz quadrada de 3 como $\sqrt{3}$ (para mais informações sobre raízes quadradas e radicais, veja o Capítulo 4). Agora a fatoração pode escrita: $x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$.

Fatorando a diferença de cubos perfeitos

Um cubo perfeito é um número que você tem quando multiplica o número por ele mesmo e depois multiplica a resposta pelo primeiro número de novo. Um cubo é a terceira potência de um número. A diferença de dois cubos é a expressão binomial $a^3 - b^3$.

Os cubos perfeitos mais conhecidos são aqueles cuja raiz é um número inteiro, e não decimal. Veja a folha de consulta para a lista dos 10 números inteiros positivos ao cubo. Se familiarizar e reconhecer esses cubos em um problema de álgebra podem fazer você economizar tempo e melhorar a sua precisão.

Consulte o Capítulo 4 caso não esteja conseguindo se lembrar dessas regras para trabalhar com expoentes. No primeiro exemplo, o cubo de fora dos parênteses quer dizer que cada variável é elevada aquela potência. No segundo exemplo, a regra que envolve elevar uma potência a outra potência é usada. Ambos os resultados são cubos.

$$(yz)^3 = y^3 \cdot z^3$$

$$(a^2)^3 = a^6$$



Variáveis ao cubo são fáceis de distinguir porque seus expoentes são sempre divisíveis por três. Quando um número é elevado ao cubo e multiplicado, você nem sempre pode dizer que é um cubo a não ser que você memorize os cubos ou consulte listas.

Olhe a lista a seguir. Essas expressões são diferenças de cubos que podem ser fatoradas. Cada termo é um cubo – todos os números têm uma raiz cúbica (o número que é multiplicado por ele mesmo três vezes) cuja maioria está na lista de cubos. Todas as variáveis têm potências que são múltiplos de três.

- $m^3 - 8$
- $1.000 - 27z^3$
- $64x^6 - 125y^{15}$

Note que cada um dos números é um cubo perfeito e que cada uma das variáveis tem uma potência que é múltipla de três.



Para fatorar a diferença de dois cubos perfeitos, lembre-se que a diferença de dois cubos perfeitos é igual a diferença das suas raízes cúbicas multiplicadas pela soma dos seus quadrados e o produto das suas raízes cúbicas.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Os resultados da fatoração da diferença de cubos perfeitos são:

- Um fator binomial $(a - b)$ formado das duas raízes cúbicas dos cubos perfeitos separadas pelo sinal de menos. Para achar a raiz cúbica, consulte a lista de cubos na folha de consulta. Se o cubo não estiver lá e o número for menor do que o maior cubo na lista, então o número não é um cubo perfeito. Para números grandes, use uma calculadora científica e o botão da raiz cúbica.
- Um fator trinomial $(a^2 + ab + b^2)$ formado pelos quadrados das duas raízes cúbicas somados ao produto das raízes cúbicas no meio. Lembre-se que um trinômio tem três termos e este têm todos os sinais positivos.

Os três exemplos a seguir mostram como a regra funciona. O primeiro exemplo normalmente não é muito visto na álgebra, mas eu o incluí para convencer qualquer cético.

- Neste exemplo, use somente números. Fatore a diferença entre os cubos 216 e 125 para ver como essa regra realmente funciona.

  $$216 - 125$$

  Usando a regra $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, veremos que 216 é a^3 e 125 é b^3.

  A raiz cúbica de 216 é 6 e a raiz cúbica de 125 é 5, então 6 é o a e 5 é b.

  E, também, 36 é a^2, 25 é b^2 e 30 é o produto ab.

  Substituindo em $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, você tem $216 - 125 = (6 - 5)(36 + 30 + 25)$.

  Cheque para ver se a equação é verdadeira. A diferença entre 216 e 125 é 91 e 36 + 30 + 25 é igual a 91.

  $$91 = (1)(91)$$

  Isso mostra que mesmo que a expressão seja a diferença de dois cubos ou a forma fatorada, a resposta sempre será a mesma.

  Isto na verdade não prova nada, mas é uma boa demonstração de que o método funciona em números.

- Fatore $m^3 - 8$.

  A raiz cúbica de m^3 é m, e a raiz cúbica de 8 é 2.

  $$m^3 - 8 = (m - 2)(m^2 + 2m + 4)$$

  Note que o sinal entre o m e o 2 é o mesmo que o sinal entre os cubos. O quadrado de m é m^2 e o quadrado de 2 é 4. O produto das duas raízes cúbicas é $2m$ e os sinais do trinômio são todos positivos.

- Fatore $64x^3 - 27y^6$.

  A raiz cúbica de $64x^3$ é $4x$ e a raiz cúbica de $27y^6$ é $3y^2$.

  O quadrado de $4x$ é $16x^2$, o quadrado de $3y^2$ é $(3y^2)^2 = 9y^4$ e o produto de $(4x)(3y^2)$ é $12xy^2$.

  $$64x^3 - 27y^6 = (4x - 3y^2)(16x^2 + 12xy^2 + 9y^4)$$

- Fatore $a^3b^6c^9 - 1331d^{300}$.

  A raiz cúbica de $a^3b^6c^9$ é ab^2c^3 e a raiz cúbica de $1331d^{300}$ é $11d^{100}$.

  O quadrado de ab^2c^3 é $a^2b^4c^6$ e o quadrado de $11d^{100}$ é $121d^{200}$.
  O produto de $(ab^2c^3)(11d^{100})$ é $11ab^2c^3d^{100}$.

  $$a^3b^6c^9 - 1331d^{300} = (ab^2c^3 - 11d^{100})(a^2b^4c^6 + 11ab^2c^3d^{100} + 121d^{200})$$

Fatorando a soma de cubos perfeitos

Você vai ter um descanso. A regra para fatorar a soma de dois cubos perfeitos é praticamente a mesma que para fatorar a diferença de dois cubos perfeitos que eu falei no tópico anterior. Você só tem que trocar dois pequenos sinais para fazer a regra funcionar.



A soma de dois cubos perfeitos é igual a soma das suas raízes vezes o quadrado das suas raízes menos o produto das raízes.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Assim como os resultados da fatoração da diferença de dois cubos, os resultados da fatoração da soma de dois cubos também são formados por um termo binomial $(a + b)$ e por um termo trinomial $(a^2 - ab + b^2)$.

Note que o sinal entre as duas raízes cúbicas $(a + b)$ é o mesmo que o sinal no problema a ser fatorado $(a^3 + b^3)$. Os quadrados na expressão trinomial são ambos positivos, mas você muda o sinal do termo do meio para menos.

- Veja este exemplo prático para ter uma idéia clara de como fatorar a soma de dois cubos.

  $$1.000z^3 + 343$$

  A raiz cúbica de $1.000z^3$ é $10z$ e a raiz cúbica de 343 é 7. O produto de $10z$ e 7 é $70z$.

  $$1.000z^3 + 343 = (10z + 7)(100z^2 - 70z + 49)$$



Ótimos líderes fazem ótimos matemáticos

Dois líderes famosos, Napoleão Bonaparte e o presidente dos Estados Unidos James Garfield, eram atraídos pelos mistérios da matemática. Napoleão Bonaparte imaginava-se como um geômetra amador e gostava de andar com matemáticos – sim, eles são muito divertidos!

O teorema de Napoleão – que ele nomeou para ele – diz que se você pega qualquer triângulo e constrói triângulos eqüiláteros em cada um dos três lados e encontra o centro de cada um desses três triângulos e conecta eles, os segmentos conectores sempre formam outro triângulo eqüilátero. Nada mal para alguém que encontrou seu Waterloo!

O vigésimo presidente dos Estados Unidos, James Garfield, também se envolveu na matemática e descobriu uma nova prova para o teorema de Pitágoras, que é feito por um trapézio que consiste de três triângulos retângulos e trabalhando com as áreas dos triângulos.

Trabalhando com trinômios e maiores

Você pode escolher, entre um total de dois, o melhor método para fatorar expressões com três termos *(trinômios):*

- Encontrar o MDC
- Fatorar por Soma e Produto (desfazer o PEIU)

Para mais informação em ambos os métodos, veja o Capítulo 9. Qualquer problema de fatoração consiste em reconhecer os dados que você possui de modo a saber qual melhor método a ser aplicado a eles. Com trinômios, você pode usar a fatoração por Soma e Produto (desfazer o PEIU) se o trinômio tem a forma $ax^2 + bx + c$. Você pode achar o MDC se um fator comum estiver disponível. Depois de verificar essas duas situações, se nenhuma delas se enquadrar, então você terminou! O trinômio não pode ser fatorado.

Basicamente, você pode fatorar uma expressão com quatro, seis, oito ou mais termos ou achando o MDC ou agrupando. O Capítulo 9 aborda em detalhes como encontrar o máximo divisor comum. O agrupamento de polinômios será abordado no próximo tópico.

Agrupamento

A outra opção para fatorar quatro ou mais termos é tentar agrupar termos para tornar os novos grupos fatoráveis. O agrupamento foi originalmente abordado no Capítulo 9, mas este capítulo amplia o processo para mais termos e outros tipos de agrupamento.

Separando quatro termos em dois grupos de dois termos

A forma mais comum de agrupamento é encontrar um fator comum diferente em cada um dos dois grupos formado a partir de quatro termos. Primeiro, separe os quatro termos ao meio para começar a formar grupos. Se isso não funcionar, coloque os termos com algo em comum no mesmo grupo para mudar a ordem dos termos. Você pega o fator comum de cada grupo, separadamente, e depois torce para encontrar um novo fator comum nos novos termos. O novo fator comum normalmente resulta da fatoração de cada grupo separado. O exemplo a seguir talvez ajude você a entender agrupamento de quatro ou mais termos:

- Fatore $8ax + 12ay + 10bx + 15by$.

  Os dois primeiros termos compartilham o fator comum $4a$ e os outros dois termos têm o fator comum $5b$.

  $$8ax + 12ay + 10bx + 15by = 4a\,(2x + 3y) + 5b(2x + 3y)$$

  Neste caso, o agrupamento resultou em dois termos novos, cada um com um fator de $(2x + 3y)$. Este novo fator é comum para ambos, então o método do MDC vai funcionar.

  Pegue o fator comum dos dois termos e veja o que você tem.

  $$4a(2x + 3y) + 5b(2x + 3y) = (4a + 5b)\,(2x + 3y)$$

  Pronto!

Dividindo seis termos em dois ou três grupos

O próximo exemplo tem seis termos. Porque dois e três divide seis de forma exata, há uma chance de os grupos serem dois grupos de três termos ou três grupos de dois termos cada. Algumas vezes você pode fazer de qualquer jeito. Algumas vezes você só tem que tentar até achar a maneira certa. Neste caso, ambas as maneiras funcionam.

- Fatore dividindo os termos em dois *grupos de três*.

  $$ax^2 + 3ax + 2a + bx^2 + 3bx + 2b$$

  Os três primeiros termos têm um fator comum de a, e outros três termos têm um fator comum de b.

  $$a(x^2 + 3x + 2) + b(x^2 + 3x + 2)$$

  Agora temos dois grupos, cada um com um fator comum de $(x^2 + 3x + 2)$.

  $$a(x^2 + 3x + 2) + b(x^2 + 3x + 2) = (x^2 + 3x + 2)(a + b)$$

  Note que o primeiro fator é uma expressão quadrática que pode ser fatorada por soma e produto.

  $$(x^2 + 3x + 2) = (x + 1)(x + 2)$$

  $$(x^2 + 3x + 2)(a + b) = (x + 1)(x + 2)(a + b)$$

- Agrupar os termos dois de cada vez é outra maneira de resolver este problema. Reorganize os termos colocando as variáveis x^2, as variáveis x e os números juntos.

  $$ax^2 + bx^2 + 3ax + 3bx + 2a + 2b$$

  Os dois primeiros termos têm um fator comum de x^2, o terceiro e quarto termos tem um fator comum de $3x$ e os dois últimos termos tem um fator comum de 2.

  $$x^2(a + b) + 3x(a + b) + 2(a + b)$$

  Agora você tem três termos, cada um com o fator $(a + b)$. Pegue o $(a + b)$ de cada termo para conseguir:

  $$(a + b)(x^2 + 3x + 2) = (a + b)(x + 1)(x + 2)$$

De que maneira você mais gosta? Você pode escolher a que achar mais fácil. E tenha certeza que vai ter a mesma resposta que todo mundo!

Agrupamento irregular

Até então o agrupamento envolveu quatro ou seis termos divididos em grupos do mesmo tamanho. Algumas vezes quatro termos podem ser separados em agrupamentos irregulares com três termos em um e um termo no outro. A maneira de reconhecer esses agrupamentos é procurar por quadrados. É claro que você geralmente não procura por agrupamentos irregulares, a menos que outros métodos de agrupamento tenham falhado.

- Fatore $x^2 + 8x + 16 - y^2$.

  Este tem quatro termos, mas não há emparelhamento igual de termos que te forneçam um conjunto de fatores comuns úteis. Outra opção é agrupar *irregularmente*. Agrupe os três primeiros termos juntos, porque eles formam um trinômio que pode ser fatorado. Isto deixa o último termo sozinho.

  $$x^2 + 8x + 16 - y^2 = (x^2 + 8x + 16) - y^2$$

  Fatore o trinômio por soma e produto.

  $$(x + 4)^2 - y^2$$

  Note que agora há dois novos termos, e que cada um é um quadrado perfeito. Usando a regra do tópico "Fatorando a diferença de dois quadrados perfeitos" (no começo do capítulo), $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, termine esse exemplo:

  $$(x + 4)^2 - y^2 = [(x + 4) + y][(x + 4) - y]$$

Não há nenhuma grande vantagem em se desfazer dos parênteses dentro dos colchetes, então deixe a resposta como está.

Sabendo quando parar

Uma das minhas cenas favoritas do filme The Agony and the Ecstasy *("Agonia e êxtase")*, que narra a pintura da Capela Sistina por Michelângelo, é quando o Papa entra na Capela Sistina, olha para o andaime, a tinta pingando, para Michelângelo pendurado perto do teto e grita: "Quando vai estar pronto?" Michelângelo diz: "Quando eu terminar!".

O questionamento do Papa pode ser aplicado à fatoração de problemas: "Quando está *terminado*?".

A fatoração está *terminada* quando mais nenhuma parte puder ser fatorada. Se você consultar a listagem das maneiras de fatorar dois, três, quatro (ou mais) termos, então você pode selecionar as opções, descartar as que não servem e parar quando mais nenhuma funcionar. Depois de fazer um tipo de fatoração, você deve olhar os valores nos parênteses para ver se qualquer termo ainda pode ser fatorado.

Ao fatorar, determine qual tipo de expressão você tem – binomial, trinomial, quadrática, cúbica e assim por diante. Isto ajuda você a decidir qual método usar. Continue, verifique dentro dos parênteses para mais oportunidades de fatoração até que esteja terminado.

- Fatore $4x^4y - 108xy$.

  O MDC dos dois termos é $4xy$. Fatore isto primeiro.

  $$4x^4y - 108xy = 4xy(x^3 - 27)$$

  O binômio nos parênteses é a diferença de dois cubos perfeitos e pode ser fatorado usando a regra do começo desse capítulo.

  $$4xy(x^3 - 27) = 4xy(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

  Mesmo que o último fator, o trinômio, aparente ser candidato para uma fatoração por soma e produto você não precisa se preocupar quando tem um trinômio como resultado da fatoração de cubos, porque desfazer o PEIU não vai fatorá-los. A única coisa que pode fatorá-los é encontrar o MDC.

  Você terminou!

- Fatore $x^4 - 104x^2 + 400$.

  Não tem MDC, então a única outra opção quando há três termos é fatorar por agrupamento (desfazer o FOIL).

  $x^4 = x^2 \cdot x^2$ e um par de fatores de 400 é 4 e 100; este é o par que tem como resultado da soma 104.

  $$x^4 - 104x^2 + 400 = (x^2 - 4)(x^2 - 100)$$

  Agora temos dois novos fatores, mas cada um deles é a diferença de quadrados perfeitos.

  $$(x^2 - 4)(x^2 - 100) = (x + 2)(x - 2)(x + 10)(x - 10)$$

  Você terminou!

- Fatore $3x^5 - 18x^3 - 81x$.

  O MDC dos termos é $3x$.

  $3x^5 - 18x^3 - 81x = 3x(x^4 - 6x^2 - 27)$

  O trinômio pode ser fatorado por agrupamento (desfazer o FOIL).

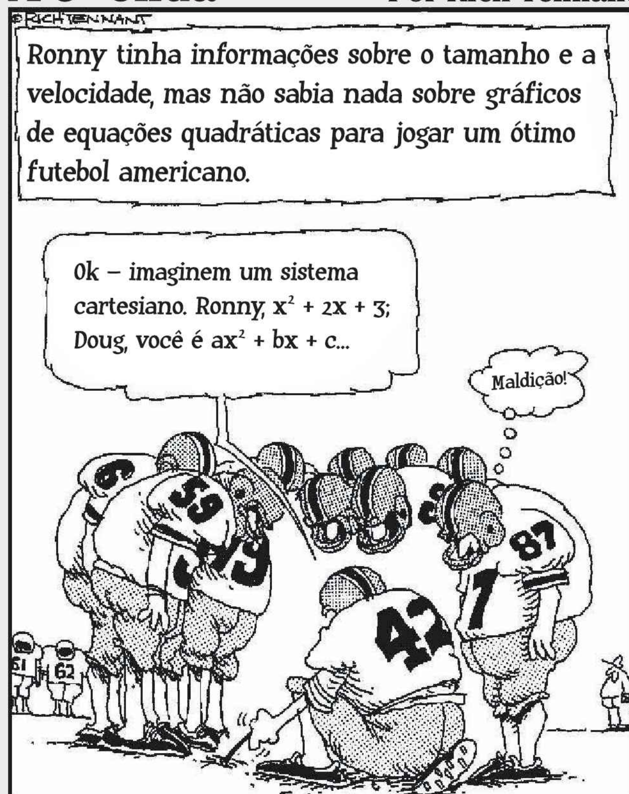
  $3x(x^4 - 6x^2 - 27) = 3x(x^2 - 9)(x^2 + 3)$

  O segundo binômio é a diferença de quadrados.

  $$3x(x^2 - 9)(x^2 + 3) = 3x(x - 3)(x + 3)(x^2 + 3)$$

Você terminou não somente com esse problema, mas com este capítulo!

Parte III
Trabalhando com equações



Nesta parte...

Você é um fã de Sherlock Holmes, de Perry Mason, Jessica Fletcher ou da nova equipe do CSI (Crime Scene Investigation – "Investigação da cena do crime")? Todos eles são detetives que usam a investigação, a lógica e intuição para solucionar problemas – e ao mesmo tempo entreter.

Resolver equações também pode ser divertido. A sensação da busca e a solução final correta te dão aquele sentimento de missão cumprida. Que comece o show!

Capítulo 12

Organizando-se para equações lineares

Neste capítulo:

- Indo para algum lugar?
- Aplicando fórmulas algébricas
- Solucionando problemas do dia a dia
- Reconhecendo equações práticas

Neste capítulo, você encontra todas as maneiras para resolver equações lineares com somente dois termos. *Linear* quer dizer que a maior potência de qualquer variável que você está solucionando é igual a um. Ao contrário de uma expressão, que não possui um sinal de igual (=) e nenhuma relação com outro valor qualquer, uma *equação*, que sempre tem um sinal de igual, faz uma afirmação sobre algo. Desta forma, o que estiver de um lado deste sinal é sempre igual ao valor que está do outro lado. Neste capítulo, ao invés de lidar com expressões do tipo $3x + 2$, eu mostro como resolver equações do tipo $3x + 2 = 11$.

Equações de dois termos, ao contrário de presidentes com dois mandatos, são coisas muito simples, e você pode aplicar as técnicas que você usa nessas equações em equações mais complicadas.

Quando você usa a álgebra no mundo real, na maioria dos casos você utiliza uma fórmula para ajudar você a fazer o problema. Felizmente, quando falamos em fórmulas algébricas, você não precisa se esforçar como se precisasse reinventar a roda: você pode usar fórmulas padrão e consagradas para resolver problemas comuns e do dia a dia.

Resolvendo com divisão

Um dos métodos mais básicos para resolver equações é dividir cada lado da equação pelo mesmo número. Muitas fórmulas e equações incluem um coeficiente, ou multiplicador, com a variável. Para se livrar do multiplicador e resolver a equação, você divide. Veja como fazer isso no exemplo a seguir:

Ache o valor de x na equação $20x = 170$.

1. **Determine o multiplicador da variável e divida ambos os lados por ele.**

   Porque a equação envolve multiplicar 20 vezes, desfaça a multiplicação na equação fazendo o oposto da *multiplicação,* que é *dividir*.

   Divida cada lado por 20.

   $$\frac{20x}{20} = \frac{170}{20}$$

2. **Reduza ambos os lados do sinal de igual.**[1]

   $$\frac{\cancel{20}x}{\cancel{20}} = \frac{170}{20}$$

   $$x = 8{,}5$$



Faça de um lado da equação o que você fez do outro lado.

Agora tente mais alguns exemplos para entender melhor.

Você precisa comprar 300 donuts para uma grande reunião. Quantas dúzias de donuts isso representa? Use *d* para representar o número de dúzias de donuts que você precisa. Há 12 donuts em uma dúzia, então $12d = 300$. Doze vezes o número de donuts que você precisa tem que ser igual a 300.

1. **Determine o multiplicador da variável e divida ambos os lados por ele.**

   Divida cada lado por 12.

   $$\frac{12d}{12} = \frac{300}{12}$$

2. **Reduza ambos os lados do sinal de igual.**

   $d = 25$ dúzias de donuts



Arquimedes, propulsor e banhista

Nascido em meados de 287 a.C., Arquimedes, um matemático e artífice inspirado, inventou uma bomba para levar a água de um nível mais baixo pra um nível mais alto. Essas bombas eram usadas pra irrigação em barcos e minas, e hoje ainda são usadas em algumas partes do mundo.

Ele também fez instrumentos astronômicos e desenhou ferramentas para a defesa da sua cidade durante a guerra. Conhecido por ser capaz de mover grandes pesos com alavancas simples, rodas dentadas e polias, Arquimedes determinou o menor cilindro possível que poderia conter uma esfera e assim descobriu como calcular o volume da esfera. O diagrama esfera / cilindro foi gravado na sua lápide.

Uma de minhas lendas favoritas diz que enquanto Arquimedes ia tomar banho, ele teve uma revelação sobre como poderia determinar o volume e a pureza de um objeto de ouro usando um método de imersão em água. Ele ficou tão animado com a revelação que pulou para fora da banheira e correu nu pelas ruas da cidade gritando, "Eureca! Eureca! (Eu descobri!).

Se sua chefe ganha o quíntuplo do que você ganha, e o salário dela é $200.000, qual é o seu salário? (O maior enigma deve ser porque ela ganha tanto!).

Escreva o enigma na forma de equação, deixando x representar seu salário: $5x = 200.000$.

1. **Determine o multiplicador da variável e divida ambos os lados por ele.**

   Porque o enigma envolve 5 vezes, desfaça a multiplicação no enigma fazendo o oposto da *multiplicação*, que é a *divisão*.
   Divida cada lado da equação por 5.

   $$\frac{5 \cdot x}{5} = \frac{200.000}{5}$$

   $$\frac{\not{5} \cdot x}{\not{5}} = \frac{200.000}{5}$$

   O 5 no numerador e o 5 no denominador cancelam um ao outro na esquerda. Na direita,

   $$\frac{200.000}{5} = 40.000.$$

2. **Reduza ambos os lados do sinal de igual.**

   $$x = 40.000$$

A resposta do enigma é que você ganha $40.000.

Resolvendo com multiplicação

A operação oposta à multiplicação é a divisão. A divisão foi usada no tópico anterior para resolver equações com um número multiplicando a variável. O inverso ocorre neste tópico; use a multiplicação onde um número *divide* a variável.

Olhe o exemplo a seguir. Tente achar o valor de y em $\frac{y}{11} = -2$.

1. **Determine o valor que divide a variável e multiplique ambos os lados por ele.**

   Neste caso, 11 está dividindo y, então é por ele que você vai multiplicar.

   $$11\left(\frac{y}{11}\right) = (-2)(11)$$

2. **Reduza ambos os lados do sinal de igual.**[3]

   $$\not{11}\left(\frac{y}{\not{11}}\right) = -22$$

   $$y = -22$$

Tente este enigma: o testamento de uma mulher rica ditou que sua fortuna fosse dividida igualmente pelos seus nove gatos. Cada felino recebeu $500.000, então qual era sua fortuna total antes de ser dividida? (Gatos não pagam imposto de herança).

Use f para representar o valor da fortuna. Então você pode escrever a equação:

$$\frac{f}{9} = 500.000$$

1. **Determine o valor que divide a variável e multiplique ambos os lados por ele.**

   A fortuna dividida por 9 deu uma parte de $500.000.

   Nesta equação, a fortuna foi *dividida*. Solucione o enigma *multiplicando* cada lado por 9. O oposto da divisão é a multiplicação, então a multiplicação desfaz o que a divisão fez.

   $$9\left(\frac{f}{9}\right) = 500.000 \cdot 9$$

2. **Reduza ambos os lados do sinal de igual.**

   $$\cancel{9}\left(\frac{f}{\cancel{9}}\right) = 4.500.000$$

   $$f = \$4.500.000$$

Sua fortuna era de quatro e meio milhões de reais. Estes são nove gatinhos muito felizes.

No próximo exemplo a variável é multiplicada por 4 e dividida por 5. Resolva o problema usando a multiplicação e a divisão.

Ache o valor de a em $\frac{4a}{5} = 12$.

1. **Determine o que está dividindo a variável.**

   Neste caso, o 5 está dividindo tanto o 4 quanto a variável.

2. **Multiplique os valores de cada lado do sinal de igual.**

   $$5\left(\frac{4a}{5}\right) = 12(5)$$

3. **Reduza e simplifique.**

   $$\cancel{5}\left(\frac{4a}{\cancel{5}}\right) = 12(5)$$

   $$4a = 60$$

4. **Agora, determine o que está multiplicando a variável.**

   O número 4 é o coeficiente e multiplica a.

5. **Divida os valores de cada lado do sinal de igual.**

   $$\frac{4a}{4} = \frac{60}{4}$$

6. Reduza e simplifique.

$$\frac{\not{4}a}{\not{4}} = \frac{60}{4}$$

$$a = 15$$

Resolvendo com inversos

Multiplicação e divisão são operações opostas. A multiplicação é desfeita pela divisão e vice versa, como você viu nos tópicos anteriores. Outra opção, no entanto, pode funcionar melhor algumas vezes – usar o *recíproco* ou inverso multiplicativo do número que você está tentando "se livrar". Escolha esta alternativa se a fração está multiplicando a variável, como em



$$\frac{3x}{19} = 12.$$

Dois números são recíprocos se ao multiplicá-los o produto é um.

Veja os exemplos de inversos abaixo:

- 5 e $\frac{1}{5}$ são recíprocos: $5\left(\frac{1}{5}\right) = 1$.
- $-\frac{3}{7}$ e $-\frac{7}{3}$ são recíprocos: $\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{7}{3}\right) = 1$.
- O inverso de a é $\frac{1}{a}$.
- O inverso de $\frac{1}{b}$ é b.

Normalmente é preferível resolver as equações nos menores números de passos possíveis. É por isso que você pode escolher multiplicar ambos os lados de uma equação por $\frac{5}{4}$, o *inverso* de $\frac{4}{5}$, para encontrar o valor de a na expressão $\frac{4a}{5}$, que pode ser organizada como $\left(\frac{4}{5}\right)a$.

Nos exemplos a seguir, ambos os lados da equação são multiplicados pelo recíproco da fração multiplicando a variável.

- Neste exemplo a variável é multiplicada por $\frac{4}{5}$.

  $$\frac{4a}{5} = 12$$

  Multiplique cada lado pelo inverso $\frac{5}{4}$.

  $$\frac{5}{4}\left(\frac{4a}{5}\right) = \left(\frac{5}{4}\right) \cdot 12$$

  Reduza e simplifique.

  $$\frac{\not{5}}{\not{4}}\left(\frac{\not{4}a}{\not{5}}\right) = \left(\frac{5}{\not{4}}\right) \cdot \not{12}\,3$$

  $$a = 15$$

- Ache o valor de x: $\frac{x}{2} = 19$.

  $\frac{x}{2}$ é outra maneira de dizer $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x$.

  Então você pode resolver isso multiplicando pelo recíproco de $\frac{1}{2}$, que é 2.

  $$\frac{\not{2}}{1}\left(\frac{1x}{\not{2}}\right) = 19\left(\frac{2}{1}\right)$$
  $$x = 38$$

- Ache o valor de f: $-f = 11$

  Esta é uma equação fácil de resolver, mas você pode ficar surpreso com a quantidade de pessoas que encontram a resposta errada apenas por causa de um pequeno traço na frente da letra. Pense no f como sendo multiplicado por -1. Colocando o -1, você recebe com o multiplicador com o qual trabalhar para resolver a equação.

  Qual é o inverso de -1? É -1!

  $$-f = 11$$
  $$(-1)(-1f) = 11(-1)$$
  $$f = -11$$

Outro exemplo envolve usar o inverso de uma fração, mesmo que não aparente no começo.

Ache o valor de x: $0{,}7x = 42$ (Lembre-se que 0,7 é o mesmo que ,7).

Uma maneira de resolver esta equação é dividir cada lado por ,7, mas algumas vezes pontos decimais são mal colocados.



Um ponto decimal pode ser perdido facilmente quando está na frente de um termo. Você talvez o esqueça ou pense que é uma pequena mancha. Colocar o zero na frente do ponto chama atenção para o decimal e não muda o valor do número. Observe, nesta frase, a diferença entre escrever ,8 e escrever 0,8.

Resolva a equação dividindo:

$$0{,}7x = 42$$
$$\frac{0{,}7}{0.7}x = \frac{42}{0{,}7}$$
$$x = 60$$

Outra maneira de abordar este tipo de problema é escrever o decimal na forma de fração e multiplicar pelo recíproco.

Para fazer isso neste exemplo decimal, transforme 0.7 em $\frac{7}{10}$, substituindo, assim, o decimal pela fração. O recíproco de $\frac{7}{10}$ é $\frac{10}{7}$.

$$\frac{7}{10}x = 42$$

$$\frac{\cancel{10}}{\cancel{7}}\left(\frac{\cancel{7}}{\cancel{10}}\right)x = 42\left(\frac{10}{7}\right)$$

$$x = \frac{\cancel{420}}{\cancel{7}}$$

$$x = 60$$

Montando equações

Resolver equações pode ser divertido, especialmente quando a equação tem uma finalidade – responder uma pergunta ou resolver um problema – e a verificação da realidade. Este tópico mostra como escrever uma equação para responder a uma pergunta ou solucionar algum problema que você possa vir a se deparar. Depois eu discuto a possibilidade de uma resposta fazer sentido ou não. Isso é feito através da verificação da realidade.

Transformar um problema escrito em uma equação algébrica é como fazer uma tradução de uma língua para outra. E a linguagem da álgebra tem soluções! Você precisa escolher a variável para representar o número no problema, seja o número de gatos, o número de moedas de dez centavos ou exemplos semelhantes. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão substituem as expressões como *mais do que, menos que, vezes tanto,* e assim por diante. Para uma completa revisão sobre como essas operações podem ser usadas, veja o Capítulo 1.

A simples sentença a seguir pode ser facilmente traduzida em uma afirmação algébrica: *Os dezenove livros de Hugo são três mais que o dobro dos livros que Buck tem.* As palavras e expressões para selecionar são dezenove e três mais que o dobro. Deixe x ser o número de livros que Buck tem. O verbo são, se torna o sinal de igual (=). *Três mais que* é 3 + e o dobro é $2x$, porque é duas vezes o número de livros. A equação algébrica é $19 = 3 + 2x$.

Então, não foi tão ruim, foi?

Encontrando uma finalidade

O exemplo a seguir demonstra a *finalidade* (a equação responde uma pergunta ou resolve um problema) e a verificação da realidade (a reposta aparenta estar correta).

Um grupo de rock famoso, chamado *Aftermath* vendeu 130.000 cópias do seu último CD. Este CD custa $16. A finalidade da equação é responder a pergunta: qual foi o valor total da renda resultante da venda dos CDs?

Então, o que fazer? Como resolver isso?

Deixando r representar o valor total da renda e usando 130.000 e 16, você pode montar uma equação de inúmeras maneiras diferentes. Encontre a que é a interpretação correta, aquela que resolve o problema.

- **Opção 1:** O custo de cada CD vezes o valor total da renda é igual ao número de cópias:

  $16 \cdot r = 130.000$

- **Opção 2:** O valor total da renda dividido pelo custo de um item é igual ao número de itens vendidos:

  $\frac{r}{16} = 130.000$

- **Opção 3:** O número de cópias dividido pelo valor total da renda é igual ao custo de cada CD:

  $\frac{130.000}{r} = 16$

- **Opção 4:** O valor total da renda dividido pelo número de cópias é igual ao custo de cada CD:

  $\frac{r}{130.000} = 16$

Você sabe que multiplicar o que geralmente vende pelo número de itens vendidos é como se calcula quanto dinheiro você ganhou, então a Opção 2 ou 4 funcionam porque cada uma requer multiplicar o número de CDs vendidos pelo valor de cada CD.

Na Opção 2, se o valor total da renda é dividido pelo custo de cada CD, então a resposta é quantos CDs foram vendidos. Multiplique 16 por 130.000 para chegar ao valor total da renda.

$$\frac{r}{16} = 130.000$$

$$16 \cdot \frac{r}{16} = 130.000 \cdot 16$$

$$r = 2.080.000$$

Na Opção 4, se o número de CDs vendidos divide o valor total da renda, então a resposta é quanto custa cada CD. Multiplique 130.000 pra achar o valor total da renda.

$$\frac{r}{130.000} = 16$$

$$130.000 \cdot \frac{r}{130.000} = 16 \cdot 130.000$$

$$r = 2.080.000$$

O valor total da renda é maior que de 2 milhões de reais.

Fazendo a verificação da realidade

Não, não tente fazer a verificação da realidade aqui – está além da realidade produzir tanto dinheiro assim! O problema a seguir, no entanto, é um bom exemplo de como uma verificação da realidade pode poupar você.

O número de jogadores de futebol participantes em um acampamento de verão é de 330 – 11 de cada time. Você está preparando certificados de clubes participantes para entregar a cada capitão do clube, então você precisa criar uma equação para responder a questão de quantos clubes estão representados.

Para mostrar que uma verificação da realidade pode impedir que você cometa um grande erro, finja que você não pensou nisso e resolva o problema com a seguinte equação.

A letra c representa o número de clubes de futebol.

$$\frac{c}{11} = 330$$

Você usou a variável e os dois números no problema. Importa o que você usa e onde usa? A equação vai te dar uma resposta razoável?

Multiplique cada lado por 11 para resolver c.

$$11 \cdot \frac{c}{11} = 330 \cdot 11$$

$$\cancel{11} \cdot \frac{c}{\cancel{11}} = 330 \cdot 11$$

$$c = 3.630 \text{ clubes}$$

Que droga! Isto não pode estar certo.

Agora faça uma verificação da realidade. A resposta faz algum sentido? A resposta talvez satisfaça a equação, mas se ela não faz sentido, então a equação pode estar errada.

Sua resposta é 3.630 clubes de futebol. Você tem que preparar 3.630 certificados. Você percebe que alguma coisa está errada porque você tem apenas 330 jogadores envolvidos. Talvez você tenha cometido um erro.

Uma olhada rápida na equação mostra que ela deveria ter lido:

11 jogadores por clube vezes o número de clubes = número total de jogadores

$$11c = 330$$

Agora, resolva isso.

$$11c = 330$$

Divida cada lado por 11.

$$\frac{11}{11}c = \frac{330}{11}$$

$$\frac{\cancel{11}}{\cancel{11}}c = \frac{330}{11}$$

c = 30 clubes

Isso faz muito mais sentido.

Você pode resolver uma equação corretamente, mas isso não significa que você escolheu a equação correta para resolver em primeiro lugar. Tenha certeza de que sua resposta faz sentido.

Capítulo 13

Resolvendo equações lineares

Neste capítulo:

Simplificando uma equação antes de resolvê-la

Incluindo sinais e operações dentro dos sinais de agrupamento

Somando o aditivo inverso de um número

Sabendo quando somar, dividir ou distribuir

Lidando com frações que são verdadeiras proporções

Este capítulo aborda vários dos métodos mais comuns pra resolver equações lineares, como somar e subtrair de cada lado de uma equação. Desse jeito as coisas ficam bem balanceadas.



Linear descreve uma equação cuja maior potência de qualquer termo é igual a um. Você não encontra potências e raízes de variáveis em equações lineares.

Neste capítulo será abordado o agrupamento com parênteses e colchetes, assim como a distribuição dentro de uma equação. E qual capítulo sobre como resolver equações lineares estaria completo sem um tópico sobre frações algébricas? O que mais você poderia pedir?

Mantendo as equações balanceadas

Pense em uma equação como se fosse uma gangorra: no começo você tem Tweedledum em um lado e Tweedledee em outro, e a gangorra está perfeitamente balanceada. Mas a Rainha de Copas se junta a Tweedledum e para manter as coisas balanceadas, é melhor que você coloque a Rainha de Ouros junto com Tweedledee (desde que ela pese exatamente o mesmo que a Rainha de Copas). Da mesma maneira, se você decidir que a Rainha de Ouros tem que sair da gangorra, você precisará se livrar da Rainha de Copas também.

O mesmo princípio é verdadeiro para equações – você as mantém balanceadas, equilibradas, ou verdadeiras, fazendo exatamente a mesma coisa para cada lado.

Uma equação estará balanceada, ou será *verdadeira*, se quando você fizer as operações indicadas, cada lado apresentar o mesmo resultado – mesmo que um lado do sinal de igual tenha três termos e o outro tenha somente dois termos. Olhe a equação 1 + 2 + 3 + 4 = 5 + 5. Em ambos os lados o resultado é igual a dez, mesmo que do lado esquerdo estejam quatro termos e do lado direito apenas dois.

E independente do que você fizer para resolver uma equação, você precisa manter o equilíbrio. Uma equação fica balanceada se você soma, subtrai, multiplica ou divide cada lado pelo mesmo valor. Basicamente, qualquer operação que possa ser feita em números, pode ser feita em cada lado de uma equação e, assim, ela continuará balanceada.

Jogando de acordo com as regras

Quando você está resolvendo uma equação com mais de três termos, a grande pergunta é: "O que fazer primeiro?".

Na verdade, desde que a equação continue balanceada, você pode fazer operações em qualquer ordem. No entanto, a lista a seguir diz a você como resolver sua equação na ordem que pode tornar as coisas mais fáceis.

O processo básico para resolução de equações é usar o inverso da ordem das operações. A ordem das operações (veja a Folha de consulta e o Capítulo 5) é resolver potências ou raízes primeiro, depois multiplicação ou divisão e, por ultimo, adição e subtração.



Como se sabe, sinais de agrupamento sempre interferem na solução de problemas. Assim, você deve fazer as operações necessárias para se livrar deles primeiro.



Então a ordem inversa das operações é

1. **Adição e subtração:** isso significa combinar todos os termos que podem ser combinados, tanto do mesmo lado da equação, como em lados opostos.
2. **Multiplicação e divisão:** este é, geralmente, o passo que isola ou soluciona o valor da(s) variável/variáveis.
3. **Multiplicar expoentes e achar as raízes:** potências e raízes não são encontradas nessas equações lineares – elas aparecem em equações quadráticas e em equações com grandes potências. Mas, se existissem, viriam depois na ordem inversa das operações.

Ao resolver equações lineares, o objetivo é isolar aquela variável da qual você está tentando descobrir o valor. Isolar ou deixá-la sozinha em um lado pode ser feito em um ou em vários passos. E isto tem que ser feito de acordo com as regras – você não pode simplesmente mudar as coisas aleatoriamente sem nenhuma regra!

Simplificar para mantê-la simples



Para resolver equações lineares, coloque todas as variáveis de um lado do sinal de igual e os números do outro lado. Depois multiplique ou divida pelo coeficiente da variável para resolvê-la.

- **Objetivo 1:** colocar todas as variáveis de um lado do sinal de igual e os números do outro lado.

  Para colocar todas as variáveis em um único lado e os números do outro lado, primeiro *simplifique.* Simplificar significa combinar tudo que pode ser combinado no mesmo lado do sinal de igual para colocar a expressão na forma mais fácil de ser entendida. Por exemplo,

  $2(3x - 2x + 7) = 30$

  Para simplificar este problema antes de resolvê-lo, simplesmente some, subtraia, multiplique e/ou divida termos semelhantes que estão *do mesmo lado do sinal de igual.*

  Então, $3x$ e $2x$ são dois termos semelhantes no mesmo lado com um sinal de menos na frente do $2x$. Simplifique subtraindo o $2x$ do $3x$, o que te deixa com x.

  $2(x + 7) = 30$

  Agora você também pode simplificar distribuindo o 2 pelo x e pelo 7 *do mesmo lado do sinal de igual.*

  $2x + 14 = 30$

  Você não pode mais simplificar, mas você pode subtrair 14 de *ambos* os lados da equação, numa tentativa de deixar a variável que você está resolvendo sozinha.

  $2x + 14 - 14 = 30 - 14$

  $2x = 16$

- **Objetivo 2:** multiplicar ou dividir pelo multiplicador da variável para resolver a incógnita ou deixá-la sozinha.

  Para satisfazer o objetivo 2, divida ambos os lados da equação por 2.

  $$\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$$

  $x = 8$

  Verifique a sua resposta substituindo x por 8 na equação original para ver se é uma solução real.

  $2[3(8) - 2(8) + 7] = 30$

  $2[24 - 16 + 7] = 30$

  $2[15] = 30$

  $30 = 30$

Aninhar não é para pássaros

Quando você tem um número ou variável que precisa ser multiplicada por todos os valores de dentro dos parênteses, colchetes, chaves ou uma combinação desses sinais de agrupamento, você *distribui* o número ou variável. Distribuir significa que o número ou variável perto do sinal de agrupamento multiplica todos os valores de dentro do sinal de agrupamento (O assunto sobre distribuição é abordado no Capítulo 8 e discutido mais adiante nesse capítulo).

Se dois ou mais sinais de agrupamento estão dentro um do outro, eles estão aninhados. A seguir temos alguns exemplos de expressões aninhadas.

$$\{3x - [4 + (2x - 1)] \cdot 5\}$$
$$(4xy\{3 + 5x[2(x^2 + 11) - 5] + (x^2 + 1)\} - 2)$$

Expressões aninhadas são escritas com parênteses, colchetes e chaves para tornar o objetivo mais claro. As convenções a seguir são usadas ao aninhar:



1. Ao usar expressões aninhadas, cada sinal de agrupamento de *abertura* como, por exemplo, parênteses esquerdos (, colchetes [, ou chaves {, tem que ter um sinal de agrupamento de *fechamento,* respectivamente os parênteses direitos), colchetes], ou chaves }.
2. Ao simplificar expressões aninhadas, trabalhe de fora para dentro. A expressão mais distante é aquela que não tem nenhum sinal de agrupamento dentro dela. Simplifique essa expressão ou distribua para que os sinais de agrupamento sejam eliminados. Depois vá para o próximo grupo mais distante.



Trabalhe os sinais de agrupamento de dentro para fora. Quando os sinais de agrupamento não são usados, você deve recorrer à ordem das operações para solucionar o problema (veja o Capítulo 5 e a Folha de consulta no começo do livro).

Ache o valor de x nas equações a seguir para entender como é trabalhar com sinais de agrupamento.

1. **Procure uma expressão agrupada que não tenha nenhum sinal de agrupamento dentro. Distribua.**

   $$6[2 - 3(x - 4)] = 5[2(x + 1) - 2]$$

   Tanto o $(x - 4)$ como o $(x + 1)$ se enquadram nessa descrição.

   Cada uma das expressões nos parênteses tem um número vezes ela, distribua esse número.

   $$6[2 - 3x + 12] = 5[2x + 2 - 2]$$

2. **Simplifique qualquer termo que resulte da distribuição.**

   Simplifique dentro dos colchetes fazendo as operações indicadas.

   $$6[14 - 3x] = 5[2x]$$

3. Procure outras expressões agrupadas que também não tenham sinal de agrupamento dentro dela. Distribua e simplifique.

Cada um dos colchetes tem um número pelo qual são multiplicados, então distribua novamente.

$$84 - 18x = 10x$$

Some o mesmo termo em ambos os lados.

$$84 - 18x + 18x = 10x + 18x$$

$$84 = 28x$$

4. Resolva a equação.

Divida cada lado pelo mesmo número.

$$\frac{84}{28} = \frac{28x}{28}$$

$$3 = x$$

A seguir, tente trabalhar o exemplo de operações de agrupamento sozinho. Depois verifique seu trabalho em relação aos passos mostrados abaixo para ter um pouco mais de prática.

1. Procure uma expressão agrupada que não tenha nenhum sinal de agrupamento dentro dela. Distribua.

$$5\{[3(5 - x) + 2] - 10\} = 6x + 7[2(x - 1) + 12]$$

Uma expressão agrupada está dentro de cada colchete em ambos os lados da equação. Distribua pelos parênteses dentro dos colchetes porque há números que os multiplicam.

$$5\{[15 - 3x + 2] - 10\} = 6x + 7[2x - 2 + 12]$$

2. Simplifique qualquer termo que resulte da distribuição.

$$5\{[17 - 3x] - 10\} = 6x + 7[2x + 10]$$

3. Procure outras expressões agrupadas que não tenham nenhum sinal de agrupamento dentro dela. Distribua e simplifique.

Do lado esquerdo os colchetes podem ser eliminados porque não há nada multiplicando. Distribua o 7 do lado direito.

$$5\{17 - 3x - 10\} = 6x + 14x + 70$$

$$5\{7 - 3x\} = 20x + 70$$

$$35 - 15x = 20x + 70$$

4. Resolva a equação.

Some $15x$ em ambos os lados.

$$35 - 15x + 15x = 20x + 15x + 70$$

$$35 = 35x + 70$$

Some -70 em ambos os lados.

$$35 - 70 = 35x + 70 - 70$$

$$-35 = 35x$$

Divida cada lado por 35.

$$\frac{-35}{35} = \frac{35x}{35}$$

$$-1 = x$$

Balanceando através da adição

Você pode usar a adição para resolver uma equação quando um ou mais termos estiverem junto com a variável de um mesmo lado do sinal. Usar a adição ou a subtração faz sentido porque a adição ou a subtração separam um termo do outro.

Por exemplo, a equação $x - 3 = 8$ tem três termos, dois no lado esquerdo e um no lado direito. Você poderia escolher fazer várias coisas diferentes para cada lado, mas a *melhor* escolha é somar 3 (o inverso aditivo de -3) em cada lado.

Somar 3 é a melhor escolha porque o número e seu inverso aditivo somam zero, o que deixa a variável sozinha em um lado da equação – e isso é o que se almeja.

$$x - 3 = 8$$

$$x - 3 + 3 = 8 + 3$$

$$x = 11$$

Você ainda tem a mesma verdade ou relação porque está balanceada. E agora a resposta está olhando diretamente para você.

Os exemplos a seguir mostram por que e como usar inversos aditivos ao resolver equações.

- Suponha que você colecione moedas comemorativas. Esta noite você tem 7 moedas a mais do que tinha esta manhã. Se você tem agora 11 moedas, quantas moedas você tinha durante a manhã?

  Deixar que x represente o número desconhecido de moedas que você tinha pela manhã (lembre-se que variáveis sempre representam números) é uma boa escolha porque este é o número que você quer descobrir. Depois de organizar a equação, você logo terá a resposta.

  Moedas esta manhã + 7 moedas = 11 moedas

  $$x + 7 = 11$$

Somar o inverso aditivo de +7 em cada lado é o mesmo que subtrair 7 de cada lado.

$$x + 7 - 7 = 11 - 7$$

$$x = 4$$

Sua resposta é $x = 4$. A variável x representa 4 moedas que você tinha esta manhã.

- Observe o exemplo da equação abaixo para ter uma idéia de como também é possível obter um valor negativo para x.

$$x + 11 = 4$$

$$x + 11 - 11 = 4 - 11$$

$$x = -7$$

Sim, você *pode* ter uma resposta *negativa.* Isto não funciona em gangorras, mas funciona em álgebra.

Somando primeiro versus dividindo

Assim como muitas coisas na vida, há maneiras mais fáceis e mais difíceis – e absolutamente feias – de fazer essas equações. Algumas vezes não é possível evitar o modo *feio,* mas desde que você faça o mesmo em ambos os lados da equação ela, se manterá balanceada. Além disso, você não tem que usar métodos em uma ordem em particular – algumas ordens são apenas sugestões.

- Digamos que, apenas dessa vez, você decida usar o método da divisão antes da adição na equação $4x + 51 = 83$.

  Divida cada lado por quatro.

$$\frac{4x}{4} + \frac{51}{4} = \frac{83}{4}$$

  Depois disso você precisará somar as frações em cada lado e simplificar a resposta. Isso não é tão ruim de trabalhar, mas as frações são desnecessárias. Criar frações antes que sejam realmente necessárias é algo que você deve evitar.

Distribuindo primeiro versus dividindo

Fazer a distribuição e a multiplicação primeiro pode ser muito mais fácil do que dividir. O exemplo a seguir mostra como.

Eu estava em uma competição de pescaria (sim, *existe* esse tipo de coisa, e algumas pessoas levam isso muito a sério!), e foi como surgiu esse exemplo:

Cada um dos meus quatro amigos pescou 8 peixes a mais do que eu (uma isca melhor?). Mas isto não se comparou com o vencedor, um cara do norte, que pescou 6 vezes o que eu pesquei. Se você tira 2 peixes do vencedor, o resultado ainda fica igualado ao total que os meus quatro amigos pescaram juntos. Então quantos peixes eu pesquei? Quantos peixes os meus amigos pescaram?

Deixe que x represente o número de peixes que eu peguei (Ainda bem que tamanho não importa).

$x + 8$: cada amigo pescou 8 peixes a mais do que eu

$4(x + 8)$: 4 amigos fizeram isso

$6x$: o vencedor pegou 6 vezes mais peixes do que eu

$6x - 2$: tire 2 peixes da quantidade do vencedor

Quatro amigos = Vencedor – 2

$4(x + 8) = 6x - 2$

Existem duas maneiras de fazer esse problema:

1. Você pode dividir cada lado por 4 para se livrar da multiplicação.
2. Você pode *distribuir* o 4 e evitar frações.

Eu vou mostrar a você os passos para fazer de ambas as maneiras, e você pode decidir qual faz mais sentido neste caso.

1. **Divida cada lado por 4.**

   É um pouco desagradável já fazer frações.

   $$4(x + 8) = 6x - 2$$

2. **Divida cada termo por 4.**

   $$\frac{4(x+8)}{4} = \frac{6x}{4} - \frac{2}{4}$$

3. **Simplifique.**

   $$x + 8 = \frac{6x}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

4. **Some -8 em cada lado.**

   $$x + 8 - 8 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - 8$$

   $$x = \frac{3}{2}x - 8\frac{1}{2}$$

5. **Some $-\frac{3}{2}x$ em cada lado.**

$$x - \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x - 8\frac{1}{2}$$

$$x - \frac{3}{2}x = -8\frac{1}{2}$$

6. **Simplifique.**

$$-\frac{1}{2}x = -8\frac{1}{2}$$

7. **Multiplique ambos os lados por -2.**

$$(-2)\left(-\frac{1}{2}x\right) = \left(-8\frac{1}{2}\right)(-2)$$



Ao multiplicar números mistos você precisa primeiro transformá-los em frações impróprias. Por exemplo, $8\frac{1}{2}$ se torna $\frac{17}{2}$. (Veja o Capítulo 3 para mais sobre frações).

$$(-\cancel{2})\left(-\frac{1}{\cancel{2}}x\right) = \left(-\frac{17}{\cancel{2}}\right)(-\cancel{2})$$

$$x = 17$$

Eu pesquei 17 peixes.

Cada um dos meus amigos pescou 17 + 8, ou seja, 25 peixes.

O vencedor pescou 6 ×17 ou 102 peixes.

Ok, então o primeiro método precisou de sete passos para chegar à resposta e fez você trabalhar imediatamente com frações. Escolher o método da distribuição torna o problema um pouco mais civilizado. Lembre-se, você está começando com $4(x + 8) = 6x - 2$.

1. **Distribua o 4 pelos dois termos.**

$$4x + 32 = 6x - 2$$

2. **Some - $4x$ em cada lado.**

$$4x - 4x + 32 = 6x - 4x - 2$$

$$32 = 2x - 2$$

3. **Some 2 em cada lado.**

$$32 + 2 = 2x - 2 + 2$$

$$34 = 2x$$

4. **Divida ambos os lados por 2.**

$$\frac{34}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$17 = x$$

Quatro pequenos passos e você já tem a resposta! Este método é muito melhor. Eu não sei de você, mas eu certamente prefiro não ter que lidar com frações quando não é necessário.



Ao distribuir tenha cuidado com os sinais negativos. Perder ou colocar um sinal negativo no lugar errado acontece muito facilmente. Então escreva e use-os cuidadosamente.

- Ache o valor de x em $5 - 2(x - 3) = 4x - 7$

  Distribua -2 no lado esquerdo.

  $$5 - 2x + 6 = 4x - 7$$

  Simplifique os termos da esquerda.

  $$-2x + 11 = 4x - 7$$

  Some - $4x$ em cada lado e -11 em cada lado.

  $$-2x - 4x + 11 - 11 = 4x - 4x - 7 - 11$$

  $$-6x = -18$$

  $$-\frac{6x}{6} = -\frac{18}{6}$$

  $$x = 3$$

  Agora verifique.

  $$5 - 2(x - 3) = 4x - 7$$

  Se $x = 3$, então

  $$5 - 2(3 - 3) = 4(3) - 7$$

  $$5 - 0 = 12 - 7$$

Para mim está tudo certo!

Balanceando frações

As frações surgem de repente em todo o lugar. Algumas pessoas ficam com medo só de pensar nelas, outras apenas as toleram. Ainda assim, existem pessoas que realmente *gostam* delas. Este tópico te mostra algumas maneiras práticas de lidar com frações. Pois as frações fazem parte da vida – e das equações lineares!

Multiplicando produtos cruzados

Uma *proporção* é composta de duas razões iguais. Ela pode ser escrita na forma de equação, com dois pontos (3:4 = 6:8) ou na forma de uma equação com frações $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Comparar tamanhos e quantidades é uma situação comum na álgebra e na vida. Se quatro homens para cada nove mulheres estão no quarto, então você pode pensar que vai haver algum tipo de problema social.



Uma *proporção* é a relação entre um par de números, a e b, e outro par de números, c e d, tal que você obtenha o mesmo resultado quando eles são divididos (*a* dividido por *b* e *c* dividido por *d* $-\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$). O resultado da multiplicação do numerador de uma fração pelo denominador da outra fração é o *produto cruzado*. Se os dois produtos vetoriais das duas frações são iguais ($a \cdot d = b \cdot c$), então você tem uma *proporção*, que é o mesmo que frações equivalentes.

Para demonstrar isso veja esses produtos cruzados de algumas frações equivalentes.

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \quad = \quad 1 \cdot 6 = 3 \cdot 2 \quad = \quad 6 = 6$$

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} \quad = \quad 3 \cdot 12 = 9 \cdot 4 \quad = \quad 36 = 36$$

$$\frac{8}{10} = \frac{12}{15} \quad = \quad 8 \cdot 15 = 12 \cdot 10 \quad = \quad 120 = 120$$

Note quando você termina somente um termo está em cada lado do sinal de igual. Uma proporção não deve ter mais de um termo em cada lado do sinal de igual. Observe os problemas a seguir para ver como você pode usar proporções para resolver equações.

- Achе o valor de x se $\frac{x}{8} = \frac{5}{20}$

  $$x \cdot 20 = 8 \cdot 5 = 40$$

  Divida cada lado por 20.

  $$\frac{x \cdot \cancel{20}}{\cancel{20}} = \frac{40}{20}$$

  $$x = 2$$

  A proporção é

  $$\frac{2}{8} = \frac{5}{20}$$

- A receita do biscoito com pedaços de chocolate requer 2¼ xícaras de farinha e 2 ovos. Você quer usar todos os 12 ovos da sua geladeira. Quanto de farinha você irá precisar (supondo que você também tenha o suficiente dos outros ingredientes)?

  A proporção é $\frac{2\frac{1}{4}\ \textit{xícaras de farinha}}{2\ \textit{ovos}} = \frac{x\ \textit{xícaras de farinha}}{12\ \textit{ovos}}$



Existem inúmeras maneiras de escrever essa proporção ou uma equivalente a ela. Por exemplo, a resposta também pode ser obtida com:

$$\frac{2\frac{1}{4}\ \textit{xícaras de farinha}}{x\ \textit{xícaras de farinha}} = \frac{2\ \textit{ovos}}{12\ \textit{ovos}}$$

$$\frac{12\ \textit{ovos}}{2\frac{1}{4}\ \textit{xícaras de farinha}} = \frac{x\ \textit{xícaras de farinha}}{2\ \textit{ovos}}$$

Em cada caso, os produtos vetoriais são os resultados dos mesmos valores sendo multiplicados juntos.

De volta ao problema da receita do biscoito. A proporção é

$$\frac{2\frac{1}{4}}{2} = \frac{x}{12}$$

$$2\frac{1}{4} \cdot 12 = 2 \cdot x$$

$$\frac{9}{4} \cdot 12 = 2x$$

O número misto foi transformado em uma fração imprópria.

$$27 = 2x$$

$$x = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2} \textit{ xícaras de farinha}$$

É um bocado de biscoitos!

Transformando frações em proporções

As proporções são razoavelmente fáceis de lidar. Multiplicar numeradores e denominadores para achar os produtos vetoriais torna tudo muito fácil. Outros tipos de equações com frações podem oferecer mais que um desafio, mas nada que não possa ser resolvido!

$\frac{x}{3} = \frac{8}{45}$ é uma proporção.

$\frac{x}{3} + \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$ *não* é uma proporção.

Mas você pode *criar* uma proporção. Afinal de contas, proporções são muito fáceis de trabalhar – é um processo familiar.

- Para escrever a seguinte equação na forma de proporção, você precisa mudar o problema para que apenas uma fração fique do lado esquerdo. Se precisar revisar adição de frações, veja o Capítulo 3.

  $$\frac{x}{3} + \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$$

  Para somar as frações da esquerda, encontre o denominador comum para as frações, que neste caso é 15.

  Crie frações equivalentes com 15 no denominador.

  $$\frac{5 \cdot x}{5 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{45}$$

  $$\frac{5x}{15} + \frac{12}{15} = \frac{8}{45}$$

  Some as frações.

  $$\frac{(5x + 12)}{15} = \frac{8}{45}$$

Agora você tem uma proporção e pode multiplicar para achar o produto vetorial e se livrar das frações.

$$(5x + 12) \cdot 45 = 15 \cdot 8$$

Distribua o 45 e simplifique o lado direito.Talvez você prefira primeiro dividir cada lado por 15 para manter os números pequenos.A escolha é sua!

$$225x + 540 = 120$$

Subtraia 540 em ambos os lados.

$$225x + 540 - 540 = 120 - 540$$

$$225x = -420$$

Divida cada lado por 225 para reduzir a fração da direita.

$$\frac{225x}{225} = \frac{-420}{225}$$

$$x = \frac{-28}{15}$$

No começo desse problema, talvez tivesse sido mais fácil mover primeiro o termo sem a variável para o outro lado, mas esta é uma escolha pessoal. O resultado é o mesmo.

Mantendo frações

Frações talvez não sejam suas coisas favoritas, mas não precisa fazer de tudo para evitá-las. Algumas vezes a presença delas é inevitável. O tópico a seguir apresenta alguns *planos de jogo* razoáveis para torná-las viáveis e para dar a você a melhor chance na resposta correta. As duas melhores estratégias são:

1. Multiplicar cada lado do sinal de igual pelo número te livra dos denominadores das frações.
2. Combinar todas as frações em cada lado separadamente para criar uma proporção.

A situação a seguir é boa pra iniciantes. Use frações para resolver o problema.

Se Anki limpa a casa em 6 horas, e Bernardo limpa a casa em 12 horas, mas Clara leva 15 horas para limpar a casa, então quanto tempo levaria se todos os três ajudassem e limpassem a casa juntos (sem nenhuma briga e sem fazer corpo mole)?

A equação e frações que eu usaria são:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{15} = 1$$

Se x é o número de horas que levariam para limpar a casa trabalhando juntos, então $\frac{x}{6}$ representa $\frac{1}{6}$ do trabalho em uma hora (parte de Anki), $\frac{x}{12}$ representa $\frac{1}{12}$ do trabalho em uma hora (parte de Bernardo),

$\frac{x}{15}$ representa $\frac{1}{15}$ do trabalho em uma hora (parte de Clara) e a soma de todas as "partes" que eles fazem é o que será completado em uma hora.

Parte de Anki = $\frac{x}{6}$

Parte de Bernardo = $\frac{x}{12}$

Parte de Clara = $\frac{x}{15}$

Para resolver isso você pode seguir a rota da proporção, e o que será feito aqui deve ser semelhante a ela. No entanto, outro plano de ataque é encontrar o denominar comum para as três frações da esquerda e pra o número da direita. Depois você pode multiplicar cada lado da equação pelo denominador comum e se livrar completamente das frações.

O denominador comum para frações com denominadores de 6, 12 e 15 é 60. Como eu descobri isso? Uma maneira é adivinhar. Outra maneira é escrever as fatorações dos números e descobrir a que eles são comuns. Outro truque rápido é dado nos passos a seguir.



1. **Encontre o menor denominador comum pegando o maior denominador e verificando todos os seus múltiplos até que você encontre um que divida todos os denominadores.**

   No caso deste problema, 15 é o maior denominador:

   15 × 1 = 15: nem o 6 nem o 12 dividem 15 de maneira exata.
   15 × 2 = 30: somente o 6 divide 30 de maneira exata.
   15 × 3 = 45: nem o 6 nem o 12 dividem 45 de maneira exata.
   15 × 4 = 60: um vencedor!

2. **Reescreva o problema com o denominador comum.**

   $$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{15} = 1$$

   $$\frac{10 \cdot x}{10 \cdot 6} + \frac{5 \cdot x}{5 \cdot 12} + \frac{4 \cdot x}{4 \cdot 15} = 1$$

   $$\frac{10x}{60} + \frac{5x}{60} + \frac{4x}{60} = 1$$

3. **Multiplique cada lado pelo denominador comum.**

   Quando no problema modelo você multiplica por 60, todos os denominadores são divididos ou desaparecem.

   $$10x + 5x + 4x = 60$$

   Depois você pode somar os termos do lado esquerdo:

   $$19x = 60$$

   $$\frac{19x}{19} = \frac{60}{19}$$

   Você termina com $x = \frac{60}{19}$ ou $3\,\frac{3}{19}$ horas, que é mais ou menos 3 horas e 9 minutos.

Veja o que pode ser conquistado quando as pessoas trabalham juntas!

Se as frações estão do mesmo lado do sinal de igual, você tem duas opções:

1. Encontre o denominador comum de cada lado, combine as frações e resolva a proporção resultante.
2. Encontre o número para multiplicar ambos os lados para se livrar das frações. A escolha aqui vai depender do quão agradáveis são as frações.

Se você tem um problema como, por exemplo,

$$\frac{x}{13} + \frac{2x}{47} = \frac{5}{9} + \frac{x}{37}$$

Então, encontrar separadamente o denominador comum para ambos os lados e fazer a proporção poderia manter os números pequenos. Os números serão terríveis, não importando o que você decida fazer.

Uma equação que proporciona encontrar um único denominador comum para todo o problema é mostrada no próximo exemplo.

- $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{5} = \frac{17x}{30} + \frac{x}{2} + 1$

  Todas as frações têm denominadores que dividem 60, então este será o denominador comum para ambos os lados.

  $$\frac{45x}{60} + \frac{24x}{60} = \frac{34x}{60} + \frac{30x}{60} + \frac{60}{60}$$

  Multiplique cada lado da equação por 60. Os números 60 nos denominadores vão ser divididos deixando:

  $$45x + 24x = 34x + 30x + 60$$

  $$69x = 64x + 60$$

  Subtraia $64x$ de cada lado.

  $$69x - 64x = 64x - 64x + 60$$

  $$5x = 60$$

  Divida cada lado por 5.

  $$x = 12$$



Ao reduzir frações, *cada* termo tem que conter o fator que será dividido.

Reduzir frações é legal, desde que a redução seja feita corretamente. Dividir o numerador e o denominador pelo mesmo número pode tornar a fração mais simples. Mas, se o numerador ou o denominador tem mais de um termo, então *cada termo* tem que ser dividido por aquele número.

Solucionando em relação às variáveis

Algumas vezes as respostas algébricas são variáveis. De vez em quando é uma boa idéia deixar a resposta *aberta* ou flexível, ou seja, na forma de variável. As variáveis são usadas quando uma situação precisa ser usada repetidamente para resolver um problema. A "reposta variável" se torna um número quando valores são dados as outras variáveis do problema. Veja este exemplo.

- Você tirou 80 no primeiro teste e 40 no segundo teste. Você tem outro teste amanhã! Você tem que ter uma média de 90 nos seus três testes para poder ter a permissão para ir esquiar. Você tem que ter uma média de 80 para não perder seu direito de dirigir. Você tem que ter uma média de 70 para não perder seus direitos ao telefone. Você tem que ter uma média... Bem, você entendeu a situação...

  Some todas as notas e divida pelo número de notas para achar a *média*. Então a

  $$\text{Média dos três testes} = \frac{(\text{Nota no teste 1} + \text{Nota no teste 2} + \text{Nota no teste 3})}{3}$$

  $$= \frac{(80 + 40 + \text{Nota no teste 3})}{3}$$

  Deixe que a média dos três testes seja V (V de "vitória", é claro!).
  Deixe x representar a nota do terceiro teste.

  $$V = \frac{(80 + 40 + x)}{3}$$

  $$V = \frac{(120 + x)}{3}$$



  Você vai ter uma variável na sua resposta porque existem, no problema, duas variáveis que você usou no começo. Desde que mais de uma variável esteja na equação original, uma variável estará na resposta; sua resposta não terá um simples e único número.

  Você quer saber qual a *nota* que você precisa no próximo teste, então, ache o valor de x.

  $$V = \frac{(120 + x)}{3}$$

  Multiplique cada lado por 3.

  $$3 \cdot V = \frac{\cancel{3} \cdot (120 + x)}{\cancel{3}}$$

  $$3V = 120 + x$$

  Subtraia 120 de cada lado.

  $$x = 3V - 120$$

  A resposta tem uma variável nela. Agora aplique.

Se x é a nota que você precisa para ter uma média de V, e se $x = 3V - 120$, então você pode decidir sobre a média desejada, V, e determinar a nota necessária na prova. Tente isto e descubra o que você tem que fazer.

Digamos que você queira uma média de 90 para que possa ir esquiar:

$$x = 3V - 120$$

Substitua o V por 90.

$$x = 3(90) - 120$$

$$x = 270 - 120 = 150$$

Opa! A prova só vale até 100 pontos. Não posso dar uma nota acima do que ela vale. Descarte essa idéia. Nada de esquiar desta vez!

O que você acha de uma média de 80 para que possa dirigir até o shopping?

$$x = 3V - 120$$

Substitua o V por 80.

$$x = 3(80) - 120$$

$$x = 240 - 120 = 120$$

Eu acho que esse também não funciona. De qualquer forma, você economizou algum dinheiro.

O que você acha de uma média de 70? Sem o telefone você pode definhar e morrer!

$$x = 3V - 120$$

Substitua o V por 70.

$$x = 3(70) - 120$$

$$x = 210 - 120 = 90$$

Finalmente, uma nota possível. Pelo menos é possível no papel. Em primeiro lugar, eu acho que você não deveria ter entrando naquela enrascada!

Agora que você conseguiu passar em um teste, tente um problema que apresenta mais do que um desafio.

- Ache o valor de x em $4x - tx = 16$

  Fatore o x na esquerda.

  $$x(4 - t) = 16$$

  Divida cada lado por $4 - t$

  $$\frac{x\cancel{(4-t)}}{\cancel{(4-t)}} = \frac{16}{(4-t)}$$

  $$x = \frac{16}{(4-t)}$$

- Ache o valor de x em $5(3A + x) = 20A - 1$

  Você tem duas maneiras para proceder, mas tente distribuir o número 5 na esquerda. Se você tentar dividir por 5, você ficará logo com frações. Guarde isto até que seja realmente necessário.

  $$5(3A + x) = 20A - 1$$

  $$15A + 5x = 20A - 1$$

  Subtraia $15A$ de ambos os lados.

  $$15A - 15A + 5x = 20A - 15A - 1$$

  $$5x = 5A - 1$$

  Divida cada lado por 5.

  $$\frac{5x}{5} = \frac{(5A - 1)}{5}$$

  $$x = \frac{(5A - 1)}{5}$$

  Esta é sua resposta, mas olhe para estas equações:

  $$\frac{(5A - 1)}{5} \neq \frac{(\not{5}A - 1)}{\not{5}}$$

  $$\frac{(5A - 1)}{5} \neq A - 1$$



  Se o numerador ou o denominador tem mais de um termo, então *cada* termo tem que ser multiplicado pelo que está sendo dividido.

  A fração anterior *não* reduz porque o fator de 5 em -1 não existe. No entanto, a fração a seguir pode reduzir:

  $$\frac{(5A - 10)}{5} = \frac{5(A - 2)}{5}$$

  $$\frac{\not{5}(A - 2)}{\not{5}} = A - 2$$

Obtendo respostas impossíveis

Existem bons números para as respostas, e existem repostas *impossíveis*. Essas repostas ocorrem mais freqüentemente ao fazer problemas que têm frações e radicais. As frações podem causar problemas porque não é permitido colocar zero no denominador. Aposto que você diria que nunca faria uma coisa dessas. Bem, é claro que não, mas e se você fizer sem querer? E se a variável estiver no denominador e você acidentalmente deixar a variável igual à zero? Aqui tem algumas maneiras de evitar tal "acidente".

Tomar cuidado ao trabalhar com frações é extremamente importante, porque de vez em quando você faz tudo certo mas acaba obtendo uma reposta impossível. Você precisa ter cuidado para não deixar que o denominador fique igual a zero.

- Você declara que $x = 1$. Você está dizendo que x é a variável que representa o número 1 neste momento.

  Eleve ambos os lados da equação ao quadrado

  $$x^2 = 1$$

  Agora subtraia 1 de cada lado

  $$x^2 - 1 = 1 - 1$$

  $$x^2 - 1 = 0$$

  Divida cada lado por $x - 1$

  $$\frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)} = \frac{0}{x - 1}$$

  $$\frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)} = 0$$

  O numerador do lado esquerdo é a diferença de quadrados perfeitos, então ele é fatorado em $(x - 1)(x + 1)$.

  $$\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = 0$$

  Reduza a fração da esquerda.

  $$\frac{\cancel{(x - 1)}(x + 1)}{\cancel{(x - 1)}} = 0$$

  Resultará

  $$x + 1 = 0.$$

  Se você subtrair 1 de cada lado, $x + 1 - 1 = 0 - 1$

  $$x = -1$$

  Mas você declarou no começo que $x = 1$! x não pode ser +1 e -1. Um número não pode ser duas coisas diferentes ao mesmo tempo. Então, o que aconteceu?

O que você fez foi uma operação ilegal. Você não deveria ter dividido por $x - 1$ porque isto é igual a 0 se $x = 1$. Algumas vezes você consegue perceber que está dividindo por 0, como neste caso. Algumas vezes não é tão óbvio. É por isso que você tem que verificar suas respostas porque você poder obter uma resposta impossível ou absurda e algumas vezes fica óbvio que a resposta é impossível, mas outras vezes não.

Os exemplos a seguir ilustram o que pode acontecer. Desta vez não faça da forma *ilegal*.

- Ache o valor de x em $\frac{(x+1)}{x} = 1$

  Faça a multiplicação cruzada para ter

  $x + 1 = x$

  Subtraia x de cada lado.

  $1 = 0$

  Isto não é possível, então este problema não tem solução.

- Ache o valor de x em $\frac{(9x+4)}{x(x+2)} = \frac{7}{(x+2)}$

  Mude o lado direito para que tenha o mesmo denominador que o lado esquerdo. Você pode fazer isso multiplicando o numerador e o denominador por x.

  $$\frac{(9x+4)}{x(x+2)} = \frac{7x}{x(x+2)}$$

  Agora multiplique cada lado pelo denominador comum e você ficará somente com os numeradores (parte de cima).

  $9x + 4 = 7x$

  $9x - 9x + 4 = 7x - 9x$

  $4 = -2x$

  $\frac{4}{-2} = \frac{-2x}{-2}$

  $x = -2$

  Agora isto parece uma resposta perfeitamente respeitável, não parece? O único problema aparece quando você verifica a resposta. Veja o que acontece quando você substitui cada x por -2.

  $$\frac{(9(-2)+4)}{-2(-2+2)} = \frac{7}{-2+2}$$

  $$-\frac{14}{0} = \frac{7}{0}$$

  Você acabou terminando com zeros nos denominadores. Você não pode dividir *nada* por 0. Isso é impossível! Novamente, não há solução.

Se você mantiver a equação balanceada e seguir as regras básicas para resolver equações lineares, você não vai errar. Verifique sua resposta para ter certeza que você vai terminar exatamente onde você quer!

Capítulo 14

Decifrando as equações quadráticas

Neste capítulo:

- Resolvendo equações quadráticas especiais
- Fatorando equações quadráticas
- Usando o máximo divisor comum
- Aplicando a propriedade do produto nulo
- Fazendo as equações quadráticas funcionar para você

Equações quadráticas (de segundo grau) são fáceis de fazer porque são muito manejáveis. Encontrar a solução ou descobrir se isso é possível é relativamente fácil. Uma *equação quadrática* é uma expressão quadrática com um sinal de igual. Ela também é chamada de equação de *segundo grau,* pois sua maior potência é o número dois – o grau é a potência de número dois. Da mesma forma que desenvolvemos as equações lineares, neste capítulo detalharemos os métodos utilizados para a solução das equações quadráticas. A técnica principal para resolver estas equações é a fatoração, mas também há uma regra rápida e um pouquinho desagradável para um dos tipos especiais de equações quadráticas. E não é só porque alguém colocou alguns números e criou uma equação quadrática, que haverá, obrigatoriamente, uma solução ou resposta para ela. Você poderá dizer se não há uma resposta porque os métodos vão te mostrar.

Equações quadráticas são básicas para a álgebra e para muitas outras ciências. Algumas equações dizem que o que sobe tem que descer. Outras equações descrevem os caminhos que os planetas e cometas percorrem. No todo, equações quadráticas são fascinantes – e um tanto divertidas de trabalhar!

Lidando com equações quadráticas

Uma *equação quadrática* é aquela que apresenta um termo com o número dois como expoente e nenhum termo com uma potência maior.



Uma equação quadrática tem uma forma geral do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se isto parece familiar, significa que você leu o Capítulo 10, que fala sobre fatorar e trabalhar com expressões quadráticas. Ou que você tem delírios de equações quadráticas dançando na sua cabeça. Lembre-se, uma expressão é formada por um ou mais termos, mas não possui sinais de igual. Colocar um sinal de igual muda tudo, você passa a ter uma equação que afirma alguma coisa. Ela diz algo que é uma afirmação verdadeira se as variáveis são substituídas pelas respostas corretas. Ela diz algo que é falso quando as variáveis são substituídas pelos números errados.

Em uma equação quadrática, a letra *a* pode ser qualquer número real com exceção do zero. Se *a* fosse zero, não haveria um termo com a potência de número dois, e a equação não seria quadrática. As letras *b* e *c* podem ser qualquer número, inclusive zero. Você pode ter um ou ambos os termos ausentes e ainda ter uma equação quadrática. Veja alguns exemplos:

- $4x^2 + 3x - 2 = 0$: nesta equação, nenhum dos coeficientes é igual a zero.
- $2x^2 - 5 = 0$: Nesta equação, a letra *b* é igual a zero.
- $x^2 + 3x = 0$: Nesta equação, a letra *c* é igual a zero.
- $x^2 = 0$: Nesta equação, ambas as letras *b* e *c* são iguais a zero.

Uma característica especial das equações quadráticas é que elas podem ter, e normalmente têm, duas respostas. Sim, você pode ter duas respostas completamente diferentes para apenas um pequeno problema.

- A equação quadrática a seguir tem duas respostas:

  $$x^2 - 5x = 6$$

  Esta é uma equação quadrática porque tem o termo x^2 As duas respostas que funcionam aqui são 6 e -1.

  $$(6)^2 - 5(6) = 36 - 30 = 6, \text{ and } (-1)^2 - 5(-1) = 1 + 5 = 6$$

  Ambas funcionam!

Como eu fiz isso? Eu usei métodos para resolver equações quadráticas. Os métodos podem ser encontrados mais adiante, neste capítulo. Meu objetivo neste tópico é fazer você se acostumar com duas respostas diferentes, mas que funcionam. Se você estiver muito curioso pode pular e seguir adiante.

Como uma equação pode ter duas respostas? Qual é a certa em uma aplicação ou em um problema? Por exemplo, se o problema pergunta sobre quanto custou alguma coisa, poderiam haver duas respostas corretas? Bem, no geral, existem duas respostas corretas para uma equação quadrática, mas normalmente uma delas não

faz muito sentido em uma aplicação específica. A resposta absurda resolve a equação e constitui somente uma informação extra. Você só tem que decidir se deve ou não dar ou atenção à resposta extra.

- Uma equação quadrática tem uma forma geral do tipo:

  A equação a seguir é usada para descobrir a altura de uma bola em t segundos (*t* representa o tempo em segundos) depois de ser jogada para cima, partindo de cima de um muro de 5 metros (*h* representa a altura da bola).

  $$h = -5t^2 + 80t + 16$$

  Não se preocupe onde eu peguei a equação; é algo discutido em física e em muitas aulas de matemática.

  Eu quero descobrir quando a bola vai estar a 25 centímetros sobre o solo, então eu coloco 25 no lugar da variável *h*.

  $$25 = -5t^2 + 80t + 16$$

  Eu sei que quando t é igual a 1 ou 4, a equação é verdadeira. Bem, eu realmente não sei isso, mas eu usei métodos deste capítulo para achar a solução de uma equação quadrática para ter as respostas. Novamente, eu estou mostrando a você como duas respostas podem funcionar e ter sentido.

  Quando $t = 1$,

  $$25 = -16(1)^2 + 80(1) + 16 = -16 + 80 + 16 = 25,$$

  e quando $t = 4$,

  $$25 = -16(4)^2 + 80(4) + 16 = -256 + 320 + 16 = 25$$

  Ambas funcionam! Então, esta equação diz que, quando *t* é igual a 1 e *t* é igual a 4, a bola está a 25 metros no ar.

Se você joga uma bola no ar de uma altura de 5 metros, então a bola pode subir e passar a altura de 25 metros, subir mais do que isso, e depois ficar novamente a uma altura de 25 metros na descida.

A equação quadrática a seguir tem duas respostas, mas somente uma faz sentido no problema atual. As duas respostas funcionam na equação, mas somente uma responde a pergunta.

- A equação quadrática $C = 0{,}04n^2 + 2n + 100$ diz a você quando custa (*C*) para produzir um número (*n*) de whachamacallits.

  $C = 0{,}04n^2 + 2n + 100$ te dá o custo total *C* para *n* deles, e você quer saber quanto o custo vai ser de $124.

  Substitua *C* por 124 e tenha $124 = 0{,}04n^2 + 2n + 100$.

  Se $n = 10$ ou se $n = -60$, uma ou outra vai tornar a equação uma afirmação verdadeira. Obter essas duas respostas – onde uma delas é de vez em quando

negativa – acontece freqüentemente quando você usa uma equação para representar o que acontece na vida real. A equação geralmente funciona muito bem para te dar as respostas, mas você não pode usá-las sem discernimento. Como nesta equação em particular não faria sentido usar números negativos para n. E também não seria sensato usar valores como bilhões e trilhões para n. O preço pago por usar essas equações é que elas têm que ser usadas sob circunstâncias lógicas.

Quando $n = 10$,

$$0.04(10)^2 + 2(10) + 100 = 0.04(100) + 20 + 100 = 4 + 120 = 124$$

Quando $n = -60$,

$$0.04(-60)^2 + 2(-60) + 100 = 0.04(3600) - 120 + 100 = 144 - 20 = 124$$

Então ambas funcionam! Mas isto não faz sentido. Você não pode produzir um número negativo de itens. Em muitos casos, equações quadráticas são muito legais se você usa somente metade ou parte delas – a parte que faz sentido em certa situação.

Descobrindo outro resultado para as equações quadráticas

A equação quadrática padrão tem a forma $ax^2 + bx + c = 0$, e b ou c ou ambas podem ser iguais a zero. Este tópico mostra a você como é bom quando b é igual a 0. As soluções são bastante fáceis de encontrar.



Os 20 primeiros quadrados perfeitos (produtos de um número por ele mesmo) são: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400.

Note que os números vão do menor, 1, para o maior, 400. Não há outros quadrados perfeitos entre os listados. Isso significa que os outros 380 números entre 1 e 400 não *são* quadrados perfeitos. Todos os quadrados perfeitos têm boas raízes quadradas. A raiz quadrada de 121 é 11; a raiz quadrada de 256 é 16. Isso não é legal? Mas a raiz quadrada de 200 não é nada boa; é um número *irracional*. Números irracionais não terminam, nem se repetem depois do ponto decimal. Por exemplo, a raiz quadrada de dois, um número irracional, é 1,414213562373... Um número irracional não pode ser escrito como fração. Eles são somente o que seus nomes descrevem: selvagens e irracionais. As raízes têm valores decimais que podem ser aproximados com uma calculadora, se você precisar.

Você pode encontrar discussões sobre quadrados e raízes quadradas no Capítulo 4, e na tabela de quadrados e cubos na folha de consulta no começo do livro.

Não se preocupe se você não reconhece alguns dos quadrados maiores porque eles não são usados freqüentemente, e você normalmente recebe uma dica de

que o número é um quadrado perfeito quando está fazendo um problema. Algumas vezes a dica é somente que seria bom se fosse um quadrado (Você pode verificar na folha de consulta a lista de quadrados perfeitos).

Há uma casca de banana em relação às raízes quadradas e aos quadrados. Normalmente, se perguntam a você qual a raiz quadrada de 25, você responde "5". Bem, é claro que está certo, mas esta é apenas *a raiz quadrada principal*, que não é a única raiz quadrada. Você esqueceu-se de alguma coisa? Não, você só tem que pensar mais além. Qual outro número te dá 25? Ah, -5, é claro. Então, ao resolver equações, as duas raízes de 25 são +5 e -5.



A *raiz quadrada principal* de um número é somente o número positivo que, quando multiplicado por ele mesmo, resulta no número original. A raiz quadrada principal de 25 é 5. Ao fazer a raiz quadrada para resolver uma equação, tanto a raiz principal como seu inverso (a negativa) são usados.

Então, sob certas circunstâncias, como resolver equações quadráticas, você também tem que considerar aquela *outra* resposta.

A seguir está a regra para algumas equações quadráticas especiais – as que têm b = 0. Elas começam parecidas com $ax^2 + c = 0$, mas o c é normalmente negativo e seu inverso é somado em ambos os lados da equação para que ela se pareça com $ax^2 = c$.



Regra da raiz quadrada: Se $x^2 = k$, então $x = \pm\sqrt{k}$.

Se a raiz da variável é igual ao número k, então a variável é igual à raiz quadrada principal de k ou seu oposto.

Os exemplos a seguir mostram como usar esta regra de raiz quadrada em equações quadráticas onde $b = 0$.

- Ache o valor de x em $x^2 = 49$

  Usando a regra da raiz quadrada, $x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

  Verificando, $(7)^2 = 49$ e $(-7)^2 = 49$

- Ache o valor de m em $3m^2 + 4 = 52$

  A equação não está pronta para a regra da raiz quadrada. Some -4 em ambos os lados.

  $3m^2 = 48$

  Agora divida cada lado por 3.

  $m^2 = 16$

  Então $m = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

- Ache o valor de p em $p^2 + 11 = 7$

  Some -11 em ambos os lados para ter $p^2 = -4$.

Ops! Qual número multiplicado por ele mesmo é igual a -4? A resposta é: "Nenhum que você possa imaginar!". Na verdade, matemáticos criaram números que de fato não existem para que esses problemas sejam terminados. Os números são chamados de números complexos, mas este livro está preocupado como os números menos complexos. Então, se você está procurando um número real, este problema não tem uma resposta.

- Achе o valor de q em $(q+3)^2 = 25$

  Neste caso, você termina com duas respostas completamente diferentes, e não um número e seu oposto.

  Use primeiro a regra da raiz quadrada para ter $q + 3 = \pm\sqrt{25} = \pm 5$.

  Agora você tem duas equações lineares diferentes para resolver:

  $q + 3 = +5$ e $q + 3 = -5$

  Subtraindo 3 de cada lado da equação, as duas respostas são: $q = 2$ e $q = -8$.

  Este problema definitivamente precisa ser verificado.

  Colocando o 2, $(2+3)^2 = 25$ or $5^2 = 25$.

  Colocando o -8, $(-8+3)^2 = 25$ or $(-5)^2 = 25$.

Sim, ambas funcionam!

Fatorando em busca de uma solução

É agora que a passagem por todos os métodos de fatoração pode ter realmente valido a pena. Na maioria das equações quadráticas a fatoração é usada ao invés do método da regra da raiz quadrada visto no tópico anterior. A regra da raiz quadrada é usada quando $b = 0$ na equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$. A fatoração é usada quando $c = 0$ ou quando nem b e nem c são iguais a zero. Uma regra muito importante usada junto com a fatoração para resolver essas equações é a propriedade do produto nulo (PPN). Esta é uma regra muito óbvia. Use o máximo divisor comum e a PPN para resolver as equações a seguir.

Usando a propriedade multiplicativa do zero

Antes de você começar a fatorar, você precisa saber sobre a propriedade do produto nulo. Talvez você diga, "O que há para saber? O zero multiplica qualquer coisa e deixa nada. Ele elimina tudo!". É verdade, mas há esta outra propriedade do zero que é a base para muitas resoluções de equações na álgebra. Sozinho, o zero não é nada. Coloque-o como o resultado de um problema de multiplicação e você encontra algo interessante: a propriedade do produto nulo.



A propriedade do produto nulo (PPN) diz que se $p \cdot q = 0$, então ou $p = 0$ ou $q = 0$.

Isso parece ser óbvio, mas você deve pensar sobre isso. Nenhum outro número tem tanto poder sobre todos os outros números. Se você diz que $p \cdot q = 12$, você não prever algo sobre p ou q sozinho. Essas variáveis podem ser qualquer número – positivo, negativo, fracionário, radical ou uma mistura desses. Um produto igual a zero, no entanto, leva a uma conclusão: Um dos multiplicadores tem que ser zero. Não existe nenhuma outra maneira de se ter um produto igual a zero.

Os exemplos a seguir mostram o quão poderosa e conveniente essa regra é.

- Encontre o valor de x se $3x = 0$.

  Use a propriedade multiplicativa do zero. Então, $x = 0$ porque 3 não pode ser 0.

- Encontre o valor de x e y se $xy = 0$.

  Se $x = 0$, então y pode ser qualquer número, mesmo zero. Se $x \neq 0$, então y tem que ser 0.

Esta propriedade ajuda a resolver equações quadráticas desde que você mova tudo para um lado, fatore o lado e aplique a propriedade multiplicativa do zero. Por exemplo,

- Ache o valor de x em $x^2 = 16$.

  Você pode encontrar a raiz quadrada de cada lado para resolver, mas veja este método alternativo primeiro,

  Subtraia 16 de cada lado para ter $x^2 - 16 = 0$.



  A diferença de dois quadrados é igual a soma das raízes quadradas vezes a diferença das raízes.

  Porque $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

  Então $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4) = 0$

  Utilizando a propriedade multiplicativa do zero:

  $x - 4 = 0$ ou $x + 4 = 0$

  Resolvendo essas duas equações lineares você descobre que $x = 4$ ou $x = -4$.

Ao resolver equações quadráticas, uma vez que você está lidando com quadrados e potências ao quadrado, não custaria nada ter sua lista de quadrados perfeitos a mão. Ou use a lista da folha de consulta, se você preferir.



Obtendo a equação quadrática de segundo grau

A palavra quadrática é usada para descrever equações que têm um termo de segundo grau. Porque, então, o prefixo quatr-, que significa "quatro", é usado em uma equação de segundo grau? Parece que isso aconteceu porque um quadrado é a figura regular de quatro lados, cujos lados são todos iguais. A área de um quadrado com lados medindo x seria x ao quadrado. Então "elevar ao quadrado" neste caso é elevar a segunda potência.

Usando as abreviaturas MDC e PPN

Em muitos casos quando há somente dois termos e eles têm um fator comum a fatoração é relativamente simples. Isto é verdade em equações quadráticas da forma $ax^2 + bx + c = 0$ nas quais $c = 0$. Os dois termos restantes terão, pelo menos, o fator comum de x. Você encontra o máximo divisor comum e fatora e depois usa a propriedade do produto nulo (PPN) para resolver a equação.

Esses exemplos usam o fato de que a constante é zero e que há o fator comum de x ou mais.

- Ache o valor de x em $x^2 - 7x = 0$.

  O máximo divisor comum dos dois termos é x, então escreva o lado esquerdo na forma fatorada.

  $$x(x-7) = 0$$

  Use a PPN para dizer que $x = 0$ ou $x - 7 = 0$, isso te mostra as duas soluções $x = 0$ e $x = 7$.

- Ache o valor de x em $6x^2 + 18x = 0$.

  O máximo divisor comum dos dois termos é $6x$, então escreva o lado esquerdo na forma fatorada.

  $$6x(x+3) = 0$$

  Use a PPN para dizer que $6x = 0$ ou $x + 3 = 0$, isso te mostra as duas soluções $x = 0$ e $x = -3$.

- Visto que $c = 0$ aparece em muitas equações quadráticas, talvez seja útil ter sempre a regra ou fórmula para saber quais serão as soluções. Ache o valor de x nesta equação quadrática onde $c = 0$: $ax^2 + bx = 0$.

  O máximo divisor comum dos dois termos é x, então escreva o lado esquerdo na forma fatorada.

  $$x(ax+b) = 0$$

A primeira parte disso é bem clara, e esse negócio de $x = 0$ parece surgir o tempo todo. A segunda parte é a resolução cuidadosa de uma equação linear.

Subtraia b de cada lado.

$$ax + b - b = 0 - b$$

$$ax = -b$$

Divida cada lado por a

$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$ para ter $x = \frac{-b}{a}$

Este padrão pode ajudar você a resolver esses tipos de equações. Você pode usar isso como uma fórmula para não ter que fazer sempre a fatoração.



Esquecer o $x = 0$, a parte mais fácil dessas soluções, é surpreendentemente fácil. Você vê o pequeno e solitário x na frente dos parênteses e esquece que ele te dá uma das duas respostas. Tome cuidado.

Resolvendo equações quadráticas de três termos

Equações quadráticas são básicas não apenas para a álgebra, mas também para a física, administração, astronomia e muitas outras aplicações. Ao resolver equações quadráticas você obtém respostas para perguntas como "Quando a pedra vai atingir o solo?", "Quando o lucro vai ser maior que 100 por cento?" ou "Quando, durante o ano, a Terra vai ficar mais perto do sol?".

Nos dois tópicos anteriores ou b ou c foram igual a zero na equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Agora eu não vou deixar que ninguém fuja: neste tópico, cada uma das letras, a, b, e c é um número que *não* é zero.

Para resolver uma equação quadrática, mudar tudo para um lado com o zero do outro lado do sinal de igual é o método mais eficiente. Fatore se possível, e use a propriedade multiplicativa do zero depois de fatorar. Se não existirem três termos, então recorra aos tópicos anteriores.

Ache o valor de x em $x^2 - 3x = 28$.

Para resolver equações quadráticas com três termos siga esses passos:

1. **Mova todos os termos para um lado. Coloque o zero sozinho do lado direito.**

   Neste caso, você pode subtrair 28 de cada lado.

   $$x^2 - 3x - 28 = 0$$



Lembre-se da forma padrão para a equação quadrática: $ax^2 + bx + c = 0$.

2. **Determine todas as maneiras que você possui para multiplicar dois números para ter *a*.**

   Em $x^2 - 3x - 28 = 0$, $a = 1$, o que só pode ser 1 vezes ele mesmo.

3. **Determine todas as maneiras que você possui para multiplicar dois números para ter *c*.**

   28 pode ser $1 \cdot 28$, $2 \cdot 14$ ou $4 \cdot 7$

   1. **Se *c* é positivo, encontre uma operação da lista do Passo 2 e uma operação da lista do Passo 3 que combinem de forma que a *soma* dos seus produtos cruzados seja o mesmo que *b*.**
   2. **Se *c* é negativo, encontre uma operação da lista do Passo 2 e uma operação da lista do Passo 3 que combinem de forma que a *diferença* dos seus produtos cruzados seja o mesmo que *b*.**

   c é negativo, e a diferença entre 4 e 7 é 3. Fatorando, você obtém $(x - 7)(x + 4) = 0$.

4. **Use a propriedade do produto nulo (PPN)**

   Ou $x - 7 = 0$ ou $x + 4 = 0$; 4. Use a propriedade multiplicativa do zero (PMZ).

   $x - 7 + 7 = 0 + 7$ ou $x + 4 - 4 = 0 - 4$

   Isso significa que $x = 7$ ou $x = -4$.

5. **Verifique sua resposta.**

   Se $x = 7$, então $(7)^2 - 3(7) = 49 - 21 = 28$, e se

   $x = -4$, então $(-4)^2 - 3(-4) = 16 + 12 = 28$

   Ambas as respostas estão corretas.

Usar a fatoração para resolver equações quadráticas aparenta ser muito fácil. Mas fatorar equações trinomiais (com três termos) pode ser um pouco mais complicado. Se uma equação quadrática de três termos pode ser fatorada, então o produto de dois binômios é aquele trinômio. Se uma equação quadrática de três termos não pode ser fatorada, use, então, a fórmula quadrática, ou a fórmula de Bhaskara (veja "Entendendo a fórmula quadrática" mais adiante neste capítulo).



O produto de dois binômios $(ax + b)(cx + d)$ é igual ao trinômio $acx^2 + (ad + bc)x + bd$.

Esta é uma maneira elegante de mostrar o que você obtém usando o PEIU ao multiplicar dois binômios. Agora, vamos seguir para fatoração por soma e produto (desfazer o PEIU). Se você precisar de mais revisão de PEIU e fatoração por soma e produto (desfazendo o PEIU), dê uma olhada no Capítulo 10.

Os exemplos que vêm agora mostram como a fatoração e a PPN permitem que você encontre as soluções da equação quadrática com todos os três termos aparecendo.

Ache o valor de x em $x^2 - 5x - 6 = 0$.

1. **A equação está na forma padrão, então você pode continuar.**
2. **Determine todas as maneiras possíveis de multiplicar para achar *a*.**

   $a = 1$, o que só pode ser 1 vezes ele mesmo. Se o lado esquerdo for fatorado e você obter dois binômios, eles devem começar com x porque o primeiro termo é x^2.

   $(x \quad)(x \quad) = 0$
3. **Determine todas as maneiras possíveis de multiplicar para achar *c*.**

   $c = -6$, então os dois binômios irão terminar com:
   +2 e -3, ou -2 e +3, ou +1 e -6, ou -1 e +6.

   Para decidir qual combinação deve ser usada, olhe para o último termo no trinômio, o 6, que é negativo. Isso mostra que você tem que usar a *diferença* do valor absoluto de dois números da lista (pense nos números sem os sinais) para obter o termo do meio do trinômio, o -5. Neste caso, uma das combinações de 1 e 6 funciona, porque a diferença deles é 5. Se você usar a combinação +1 e -6, você vai ter como resultado imediato do produto cruzado do PEIU, -5.

   Então $(x - 6)(x + 1) = 0$.
4. **Usando a propriedade do produto nulo.**

   Usando a PPN, $x - 6 = 0$ ou $x + 1 = 0$. Isto diz a você que $x = 6$ ou $x = -1$.
5. **Verificando.**

   Se $x = 6$, então $(6)^2 - 5(6) - 6 = 36 - 30 - 6 = 0$.

   Se $x = -1$, então $(-1)^2 - 5(-1) - 6 = 1 + 5 - 6 = 0$.

As duas respostas funcionam!

Ache o valor de x em $6x^2 + x = 12$.

1. **Coloque a equação na forma padrão.**

   A primeira coisa a fazer é somar -12 em cada lado para que a equação fique na forma padrão para fatorar e resolver.

   $6x^2 + x - 12 = 0$

   Esta vai ser um pouco mais complicada de fatorar porque o 6 na frente tem algumas opções, e o 12 no final tem muitas opções. O truque é optar pela combinação de alternativas corretas.
2. **Encontre todas as maneiras que podem ser multiplicadas para achar *a*.**

   O número 6 pode ser obtido com o 1 e o 6 ou o 2 e o 3.

3. **Encontre todas as maneiras que podem ser multiplicadas para achar *c*.**

   O número 12 pode ser obtido com o 1 e o 12, ou o 2 e o 6, ou o 3 e o 4.

   Você deve escolher os fatores a serem usados de maneira que a *diferença* de seus produtos vetoriais (externo e interno) seja 1. Como você sabe isso? Porque nessa forma padrão o número 12 é negativo e pressupõe-se que quando não aparece nada, o valor que multiplica o termo do meio é 1.

   Examinando novamente, você pode observar que usar o 2 e o 3 para o 6 e o 3 e o 4 para o 12 funciona: $2 \times 4 = 8$ e $3 \times 3 = 9$. A diferença entre o 8 e o 9 é, naturalmente, 1. Você pode se preocupar com o sinal depois.

   Vou completar os binômios e organizar os fatores para que o 2 multiplique o 4, o 3 multiplique o 3 e eu tenha o 6 na frente e o 12 no final. Ufa!

   $$(2x \quad 3)(3x \quad 4) = 0$$

   A equação quadrática tem $+1x$ no meio, então eu preciso que o *maior* produto do número externo e do interno seja positivo. Eu consigo isso tornando o $9x$ positivo, que acontece quando o 3 é positivo e o 4 é negativo.

   $$(2x + 3)(3x - 4) = 0$$

4. **Use a PPN para resolver a equação.**

   O trinômio foi fatorado. A propriedade do produto nulo diz que $2x + 3 = 0$ ou $3x - 4 = 0$.

   Se o $2x + 3 = 0$ então $2x = -3$ ou $x = -\frac{3}{2}$.

   Se o $3x - 4 = 0$ então $3x = 4$ ou $x = \frac{4}{3}$.

5. **Verifique seu trabalho.**

   Quando $x = -\frac{3}{2}$, então $6\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right) = 12$

   $$6\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{3}{2} = \frac{27}{2} - \frac{3}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

   Quando $x = \frac{4}{3}$, então $6\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right) = 12$

   $$6\left(\frac{16}{9}\right) + \frac{4}{3} = \frac{32}{3} + \frac{4}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

Esta verificação não foi tão divertida quanto as outras, mas mostra como esse negócio de fatoração pode funcionar bem.

Ache o valor de y em $9y^2 - 12y + 4 = 0$.

1. **Esta equação já está na forma padrão.**
2. **Encontre todos os números que multiplicados te dão *a*.**

   Os fatores para 9 são 1×9 ou 3×3.

3. **Encontre todos os números que multiplicados te dão *c*.**

   Os fatores para *c* são 1×4 ou 2×2.

   O número 3 e o número 2 serão as respostas que funcionam corretamente. Isso funciona porque os dois produtos vetoriais são iguais a 6, e você precisa uma *soma* igual a 12 no meio.

   Então $9y^2 - 12y + 4 = (3y - 2)(3y - 2) = 0$. Note que eu coloco os sinais negativos porque o número 12 precisa ser uma soma negativa.

4. **Use a PPN para resolver a equação.**

   Os dois fatores são os mesmos. Isso significa que ao usar a propriedade do produto nulo ela vai te dar a mesma resposta duas vezes.

   Quando $3y - 2 = 0$, ache o valor de y.

   Primeiro some 2 em ambos os lados e depois divida por 3. A solução é $y = \frac{2}{3}$. Esta é uma raiz dupla que, tecnicamente, só tem uma solução, mas que ocorre duas vezes.



Uma *raiz dupla* ocorre em equações quadráticas que são binômios quadrados perfeitos. Se você precisar revisar, lembre-se: esses binômios foram discutidos no Capítulo 8. Os binômios quadrados perfeitos não são nada mais do que o resultado da multiplicação do binômio por ele mesmo. É por isso que quando eles são fatorados, há somente uma solução – é a mesma para cada binômio.

Ache o valor de z em $12z^2 - 4z - 8 = 0$.

1. **Esta equação já está na forma padrão.**

   Você pode começar olhando as combinações de fatores para o número 12 e para o número 8, mas você talvez note que todos os três termos são divisíveis por 4. Para tornar as coisas mais fáceis, ache o máximo divisor comum primeiro e depois trabalhe com números menores.

   $$12x^2 - 4z - 8 = 4(3z^2 - z - 2) = 0$$

2. **Encontre todos os números que multiplicados te dão *a*.**

   $$a = 1 \times 3$$

3. **Encontre todos os termos que multiplicados te dão *c*.**

   Isto é realmente maravilhoso! Especialmente porque tanto o 3 como o 2 são primos e só podem ser fatorados de uma maneira. Sua única tarefa é organizar os fatores para que entre eles haja uma diferença igual a 1.

   $$4(3z^2 - z - 2) = 4(3z \quad 2)(z \quad 1) = 0$$

   Visto que o termo do meio é negativo, você precisa tornar o produto negativo. Então coloque o sinal de negativo no 1.

   $$4(3z + 2)(z - 1) = 0$$

4. **Use a PPN para resolver a equação.**

   Desta vez, quando você usar a PPN, você deve considerar três fatores: ou $4 = 0$ ou $3z + 2 = 0$ ou $z - 1 = 0$. A primeira equação é impossível, 4 nunca vai ser igual a 0. Mas as outras duas equações oferecem respostas. Se $3z + 2 = 0$, então $z = -\frac{2}{3}$. Se $z - 1 = 0$, então $z = 1$.

5. Verificando:

Se $z = -\frac{2}{3}$, então $12\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) - 8 = 0$

e $12\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{8}{3} - 8 = \frac{16}{3} + \frac{8}{3} - 8 = \frac{24}{3} - 8 = 8 - 8 = 0$

Se $z = 1$, então $12(1)^2 - 4(1) - 8 = 12 - 4 - 8 = 0$



Note que você usa a equação original para verificar sua resposta – a equação antes de você ter feito qualquer coisa nela.

Aplicando as equações quadráticas e suas soluções

Veja algumas maneiras de usar as equações quadráticas e suas soluções. Equações quadráticas são encontradas em muitas aplicações da matemática, da física e da administração, e por isso são tão estudadas. Aqui você verá alguns exemplos dessas aplicações.

Em física, uma equação que diz qual a altura de um objeto depois de certo período de tempo pode ser escrita como $h = -5t^2 + v_0 t + h_0$. Nesta equação, o termo $-5t^2$ é o resultado da gravidade no objeto, o v_0 é a velocidade inicial (velocidade do objeto logo no começo), o h_0 é a altura inicial (a altura em metros do edifício, do penhasco ou de onde o objeto foi jogado) e a variável t representa quantos segundos se passaram.

Uma pedra foi jogada para cima do topo de um edifício de 40 metros, com velocidade inicial de 40 metros por segundo. Qual o tempo que a pedra levou para chegar a uma altura de 120 metros?

Substituindo a altura h por 120 v_0 por 40 e h_0 por 40, a equação fica da seguinte forma: $120 = -5t^2 + 40t + 80$. Você pode resolver a equação usando os seguintes passos.

1. Coloque a equação na forma padrão.

Some -296 em ambos os lados.

$$0 = -16t^2 + 128t - 256$$

2. Fatore o máximo divisor comum.

Neste caso, o MDC é -5.

$$0 = -5\left(t^2 - 8t + 16\right)$$

3. Fatore a equação quadrática.

$$0 = -5(t - 4)^2$$

4. Use PPN para achar o valor da variável.

$$t - 4 = 0,\ t = 4$$

Depois de 4 segundos a pedra atingiu a altura de 120 metros.

Este próximo exemplo utiliza as equações em questões administrativas. O custo por quilo de um tipo especial de argila é baseado em quantos quilos uma escultora encomenda de cada vez. A fórmula para o custo por quilo da argila é $0{,}05x^2 - 4x + 100$, onde x é o número de quilos de argila.

- Deixe y representar o custo por quilo e escreva a equação $y = 0{,}05x^2 - 4x + 100$.

  Substitua o x presente na equação por alguns números para entender a quantia de dinheiro envolvida.

  Para 1 quilo, $x = 1$ e $y = 0{,}05(1)^2 - 4(1) + 100 = \$96{,}05$ por quilo.

  Para 10 quilos, $x = 10$ e $y = 0{,}05(10)^2 - 4(10) + 100 = \$65{,}00$ por quilo.

  Para 25 quilos, $x = 25$ e $y = 0{,}05(25)^2 - 4(25) + 100 = \$31{,}25$ por quilo.

  A escultora quer manter as despesas baixas, e isso significa não gastar mais do que $40 por quilo. Quanto ela poderá encomendar e ainda manter o valor abaixo do previsto?

  Deixe $y = 40$ e retome a equação: $40 = 0{,}05x^2 - 4x + 100$

  Subtraindo 40 de cada lado, $0 = 0{,}05x^2 - 4x + 60$.

  Você não quer ter que fatorar isso com um número decimal multiplicando o x^2, então multiplique todos os termos de ambos os lados do sinal de igual por 20.

  $$0 = x^2 - 80x + 1200$$

  Isso é fatorado em: $0 = (x - 60)(x - 20)$

  Usando o PMZ, $x = 60$ ou $x = 20$.

O preço por quilo ficará menor do que $40 por quilo se ela encomendar entre 20 e 60 quilos. E você pode observar que o mais barato será encomendar o valor de 40 quilos.

Entendendo a fórmula quadrática

A fórmula quadrática, ou fórmula de Bhaskara, é especial para as equações quadráticas. Uma equação quadrática escrita na sua forma padrão, $ax^2 + bx + c = 0$, pode ter até duas soluções. Mas também pode haver somente uma solução ou mesmo nenhuma. Lembre-se que a, b e c são quaisquer números reais. O a não pode ser zero, mas b ou c podem. A fórmula quadrática permite que você encontre soluções quando as equações não são tão simples. Pois algumas vezes os números na equação ou suas soluções podem ser frações desagradáveis, decimais sem fim ou radicais.



A fórmula quadrática diz que se uma equação quadrática está na forma $ax^2 + bx + c = 0$, então as suas soluções, os valores de x, podem ser achados com a equação

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Existe um símbolo operacional na fórmula: ±. Isso significa que a equação pode ser quebrada em duas equações separadas, uma usando o sinal de mais e outra usando o sinal de menos. Elas se parecem com o seguinte:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{ou} x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Você consegue ver a diferença entre as duas equações? A única diferença é a mudança de mais para menos do sinal que está antes do radical.

Para encontrar soluções você pode aplicar essa fórmula em qualquer equação quadrática. A seguir está um exemplo de como a fórmula funciona.

- Use a fórmula quadrática para resolver $2x^2 + 7x - 4 = 0$.

  Recorra à forma padrão da equação quadrática na qual os coeficientes de x^2 e x são a e b, e onde a constante é c.

  $$a = 2,\ b = 7,\ c = -4$$

  Usando a primeira parte da fórmula, com o sinal de mais na frente do radical,

  $$x = \frac{-7 + \sqrt{7^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)}$$
  $$= \frac{-7 + \sqrt{49 + 32}}{4}$$
  $$= \frac{-7 + \sqrt{81}}{4}$$
  $$= \frac{-7 + 9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

  Agora, usando a segunda parte da fórmula,

  $$x = \frac{-7 - \sqrt{7^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)}$$
  $$= \frac{-7 - \sqrt{49 + 32}}{4}$$
  $$= \frac{-7 - \sqrt{81}}{4}$$
  $$= \frac{-7 - 9}{4} = \frac{-16}{4} = -4$$

Quando as respostas que você obtém ao usar a fórmula quadrática aparecem na forma de números inteiros ou frações, isso significa que a equação *poderia ser* fatorada. No entanto, isso não significa que você não deva usar a fórmula quadrática. Algumas vezes é mais fácil usar a fórmula quando a equação tem números muito grandes e desagradáveis. De qualquer forma, em geral, é mais

rápido fatorar usando a fatoração por soma e produto (desfazer o PEIU) e depois a propriedade do produto nulo, quando possível. Para ilustrar essa possibilidade, observe o exemplo anterior resolvido através da utilização da fatoração e da PPN

$$2x^2 + 7x - 4 = (2x - 1)(x + 4) = 0$$

Em seguida, usando a propriedade do produto nulo para ter:

$$2x - 1 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0$$

$$\text{Assim, } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -4$$

Então, como os resultados ficam quando uma equação não pode ser fatorada? O próximo exemplo mostrará a você.



As duas coisas com as quais devemos tomar cuidado ao resolver esse tipo de problema são:

- Não esquecer que $-b$ significa usar o oposto de b. Se o coeficiente de b na forma padrão da equação é um número positivo, então, ao usar a fórmula, mude para o seu oposto ou inverso aditivo, que será um número negativo. Se b é negativo, então mude para positivo na fórmula.

- Tome cuidado ao simplificar dentro do radical. A ordem das operações diz pra você elevar b ao quadrado primeiro e só depois multiplicar os últimos três fatores antes de subtraí-los pelo quadrado de b. Alguns erros de sinais podem ocorrer se você não tomar cuidado.

Tente outro exemplo:

- Ache o valor de x usando a fórmula quadrática em $2x^2 + 8x + 7 = 0$.

  Neste problema, a = 2, b = 8, c = 7.

  A fórmula é $\frac{x = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, mas faça as duas soluções separadamente mais uma vez.

  $$x = \frac{-8 + \sqrt{8^2 - 4(2)(7)}}{2(2)}$$

  $$= \frac{-8 + \sqrt{64 - 56}}{4} = \frac{-8 + \sqrt{8}}{4}$$

  O radical pode ser simplificado porque $\sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,

  $$\text{Então } x = \frac{-8 + 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2(-4 + \sqrt{2})}{4} = \frac{-4 + \sqrt{2}}{2}$$



Tome cuidado ao simplificar essa expressão: $\frac{(-4 + \sqrt{2})}{2} \neq -2 + \sqrt{2}$. Ambos os termos no numerador da fração tem que ser divididos por 2.

O decimal equivalente da resposta é:

$$\frac{-4 + \sqrt{2}}{2} \approx \frac{-4 + 1.414}{2} = \frac{-2.586}{2} = -1.293$$

A outra solução é $x = \frac{-8 - \sqrt{8^2 - 4(2)(7)}}{2(2)} = \frac{-8 - \sqrt{64 - 56}}{4} = \frac{-8 - \sqrt{8}}{4}$

Então $x = \frac{-8 - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2(-4 - \sqrt{2})}{4} = \frac{-4 - \sqrt{2}}{2}$

$\approx \frac{-4 - 1.414}{2} = \frac{-5.414}{2} = -2.707$

Quando você verifica essas respostas, o que as aproximações fazem?

Se $x = -1{,}293$, então $2(-1{,}293)^2 + 8(-1{,}293) + 7$

$= 3{,}343698 - 10{,}344 + 7 = -0{,}000302$

Isto não é zero! O que aconteceu? A resposta está errada? Não, está tudo bem. O arredondamento fez isso. Isso vai acontecer quando, ao invés do radical, você usar um valor arredondado para a resposta. Uma aproximação foi usada para $\sqrt{2}$ porque é um número irracional, e o decimal nunca termina. Arredondar o valor decimal em três casas decimais pareceu ser suficiente. Você não pode esperar que a verificação dê exatamente igual a zero. Em geral, se você arredonda o número que você obtém da sua verificação de acordo com mesmo número de casas que você arredondou sua estimativa do radical, você deve obter o zero que está procurando.

Capítulo 15

Distinguindo equações com potências distintas

Neste capítulo:

- Resolvendo equações cúbicas
- Resolvendo equações biquadradas
- Lidando com radicais
- Usando a divisão sintética

A maioria das aplicações algébricas envolve equações de primeiro e segundo graus. Até mesmo em cálculo e física, essas equações com potências de um e dois parecem ser suficientes para entender a maioria das aplicações. Resolva-as bem, e você se sairá bem. No entanto, de vez em quando, você pode se surpreender com uma equação com potências maiores que dois ou com uma equação com potência em forma de radical ou fração. Não entre em pânico! Você pode lidar com elas de diversas maneiras, e neste capítulo eu digo a você quais são essas maneiras. Um ponto comum é que, geralmente, a equação é igualada à zero (exceto, em algumas vezes, com radicais), então você usa a propriedade multiplicativa do zero.

Organizando as equações cúbicas

Equações cúbicas contêm um termo com uma potência de três, mas nenhuma potência maior do que três. Nessas equações, você espera encontrar até *três* soluções, ainda que exista a possibilidade de não haver três soluções. No entanto, uma equação cúbica deve ter, pelo menos, uma solução, mesmo que não pareça uma solução das mais legais. Equações quadráticas (uma equação de segundo grau com um termo que tem um expoente igual a dois) não oferecem esta garantia: equações quadráticas não precisam, necessariamente, ter uma solução.



Se uma equação de segundo grau pode ter até duas soluções diferentes e uma equação de terceiro grau pode ter até três soluções diferentes, você pode supor que existe um padrão? Você pode presumir que equações de quarto grau podem ter até quatro soluções e equações de quinto grau...? Sim, sem dúvida

que pode – essa é uma regra geral. O grau pode te dizer o número máximo de soluções para uma equação. Se o número de soluções pode ser menor do que o número do grau da equação, por outro lado, nunca haverá mais soluções do que o número do grau.

Resolvendo equações cúbicas perfeitas

Se uma equação cúbica tem apenas dois termos e ambos são cubos perfeitos, então sua tarefa é fácil porque a *soma* ou *diferença* de cubos perfeitos pode ser fatorada em dois fatores com apenas uma solução. O primeiro fator, o binômio, oferece uma solução. O segundo fator, o trinômio, não oferece uma solução (se não consegue se lembrar como fatorar volte para o Capítulo 11).



Se $x^3 - a^3 = 0$, então $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2) = 0$ e $x = a$ é a única solução.

Veja como isso funciona. Se $(x - a)(x^2 + ax + a^2) = 0$, então o PPN (propriedade produtonulo) diz que ou $x - a = 0$, que confere a solução de $x = a$, ou $x^2 + ax + a^2 = 0$. Esse trinômio não pode ser fatorado e não vai oferecer uma solução. Da mesma forma, se $(x + a)(x^2 - ax + a^2) = 0$, então o PPN diz que ou $x + a = 0$, que confere a solução de $x = -a$, ou $x^2 - ax + a^2 = 0$. Esse trinômio não pode ser fatorado e não vai conferir uma solução. Como você pode ver, essa regra usa a propriedade multiplicativa do zero (PPN), colocando o fator binomial igual a 0 e achando o valor de x.



A propriedade multiplicativa do zero (PMZ) diz que se $p \cdot q = 0$, então ou $p = 0$ ou $q = 0$. Uma delas tem que ser igual a zero para obter um produto igual a zero.

A chave para resolver equações cúbicas com dois termos quando ambos os termos são cúbicos, é reconhecer que é isso o que você tem. Examine a lista de cubos na folha de consulta e depois aplique as regras. Aqui temos alguns exemplos:

Ache o valor de x em $x^3 - 8 = 0$

1. **Fatore primeiro.**

   A fatoração é $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

2. **Aplique a propriedade do produto nulo.**

   Se $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$, então

   $x - 2 = 0$ ou $x^2 + 2x + 4 = 0$.

Somente a primeira equação, $x - 2 = 0$, tem uma resposta: $x = 2$. A outra equação não tem nenhum número satisfatório. Há somente uma solução.



O trinômio que resulta da fatoração da soma ou da diferença de dois cubos não pode ser fatorado e não tem uma solução quando igualado a zero. Para mostrar que isso é verdade, você pode usar a fórmula quadrática no trinômio. Esse processo é encontrado no Capítulo 14. Usando a fórmula quadrática, você vai rapidamente descobrir que não há resposta – pelo menos não no mundo real – que funcione na equação.

- Ache o valor de y em $27y^3 + 64 = 0$

  A fatoração aqui é $27y^3 + 64 = (3y+4)(9y^2 - 12y + 16)$.

  O primeiro fator oferece uma solução, então iguale $3y + 4$ a zero para ter $3y = -4$ ou $y = -\frac{4}{3}$.

- Ache o valor de a em $8a^3 - (a-2)^3 = 0$

  A fatoração aqui funciona igual às fatorações da diferença de dois cubos perfeitos. É apenas um pouco mais complicada porque o segundo termo é um binômio.

  $$8a^3 - (a-2)^3 = \left[2a - (a-2)\right]\left[4a^2 + 2a(a-2) + (a-2)^2\right] = 0$$

  Simplifique dentro do primeiro colchete distribuindo o sinal negativo e você terá: $\left[2a - (a-2)\right] = [2a - a + 2]$.

  Simplifique para ter $[a+2]$.

  Simplifique dentro do segundo colchetes distribuindo o $2a$ pelos termos nos parênteses e elevando ao quadrado o último binômio, você tem:

  $$\left[4a^2 + 2a(a-2) + (a-2^2)\right] = \left[4a^2 + 2a^2 - 4a + a^2 - 4a + 4\right]$$

  Simplificando, combinando os termos iguais, você tem: $\left[7a^2 - 8a + 4\right]$

  Então $8a^3 - (a-2)^3 = [a+2]\left[7a^2 - 8a + 4\right]$

  Igualando o primeiro fator a 0, você tem $a + 2 = 0$ ou $a = -2$.
  Como sempre, o segundo fator não te dá uma solução real.

Procurando o máximo divisor comum

Outro tipo de equação cúbica fácil de resolver é aquela na qual você pode fatorar o MDC (máximo divisor comum), deixando o segundo fator, que é linear ou quadrático (primeiro ou segundo grau). Você aplica a propriedade multiplicativa do zero e trabalha para achar as soluções – normalmente três delas.

Fatorando o MDC de uma variável de primeiro grau

Quando uma equação cúbica tem termos e todos apresentam variáveis de primeiro grau como fatores, então fatore-os. A equação resultante vai ter a variável como um fator, e a expressão quadrática como o segundo fator. A

variável de primeiro grau vai sempre te dar uma solução zero quando você aplicar a PPN. A quadrática pode ter soluções que você encontrará usando os métodos no Capítulo 14.

Siga esses passos para resolver x em $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$

1. **Determine que cada termo tem um fator de x e fatore.**

   O MDC é x. Fatore para ter $x\left(x^2 - 4x - 5\right) = 0$.

   Você está pronto para usar a PPN quando notar que o segundo fator, a quadrática, pode ser fatorado. Faça isso primeiro e depois use a PPN.

2. **Fatore a expressão quadrática, se possível.**

   $x\left(x^2 - 4x - 5\right) = x(x-5)(x+1) = 0$

3. **Aplique a PPN e resolva.**

   Colocando os fatores individuais iguais a zero, você tem

   $x = 0$ ou $x - 5 = 0$ ou $x + 1 = 0$.

   Isso significa que $x = 0$ ou $x = 5$ ou $x = -1$.

4. **Verifique as soluções na equação original.**

   Se $x = 0$, então $0^3 - 4(0)^2 - 5(0) = 0 - 0 - 0 = 0$

   Se $x = 5$, então $5^3 - 4(5)^2 - 5(5) = 125 - 4(25) - 25 =$

   $125 - 100 - 25 = 0$

   Se $x = -1$, então $(-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) = -1 - 4(1) + 5 =$

   $-1 - 4 + 5 = 0$

Todas as três respostas funcionam!

Para resolver z em $z^3 + z^2 + z = 0$,

1. **Determine que cada termo tem um fator de z e fatore.**

   Novamente há um fator comum, e dessa vez é z.

   Fatorando o z, a equação fica da seguinte forma $z\left(z^2 + z + 1\right) = 0$.

2. **Fatore a quadrática, se possível.**

   É aqui que você vai empacar. Embora fatorar o segundo fator pareça possível, não é. Aliás, a solução é inexistente quando o segundo fator é igualado a 0. Então a única solução é $z = 0$.

Fatorando o MDC de uma variável de segundo grau

Assim como o máximo divisor comum das variáveis de primeiro grau, você também pode fatorar as variáveis de segundo grau. Fatorar deixa você com um binômio que tem a solução para a equação cúbica. Apenas siga esses fáceis passos de dança:

1. **Os passos para a rumba são similares ao da valsa: o ritmo é devagar-rápido-rápido (um passo seguido por dois passos mais rápidos).**
2. **Passo para a esquerda em uma meia volta.**
3. **Passe diretamente para o passo principal (faça o mesmo para a valsa).**

Opa! Quer dizer... siga os passos de *fatoração* abaixo para resolver w em $w^3 - 3w^2 = 0$:

1. **Determine que cada termo tem um fator de w^2 e fatore.**

   Encontre o fator comum, w^2, e fatore para ter
   $w^3 - 3w = w^2(w - 3) = 0$.

2. **Use a propriedade multiplicativa do zero.**

   $w^2 = 0$ or $w - 3 = 0$.

3. **Resolva as equações resultantes.**

   Resolver a primeira equação envolve tirar a raiz quadrada de cada lado da equação. Esse processo normalmente gera duas respostas diferentes, uma positiva e outra negativa. No entanto, este não é o caso com $w^2 = 0$, pois 0 nem é positivo e nem negativo. Então há somente uma resposta para esse fator: $w = 0$, e o outro fator te dá uma solução de $w = 3$. Então, mesmo que essa seja uma equação cúbica, há somente duas soluções para ela.

Os exemplos a seguir irão ajudar a praticar mais esse processo:

Ache o valor de t em $9t^3 + 99t^2 = 0$

1. **Fatore o máximo divisor comum.**

   O máximo divisor comum dos dois termos é $9t^2$. Fatore para ter

   $9t^3 + 99t^2 = 9t^2(t + 11) = 0$.

2. **Resolva a equação usando a PPN.**

   Ou $9t^2 = 0$ ou $t + 11 = 0$. Isso significa que $t = 0$ ou $t = -11$.

Agrupando cubos

Agrupar é uma forma de fatoração que você pode usar quando quatro ou mais termos não apresentarem um máximo divisor comum. Esses termos podem ser agrupados, porém, quando dois pares de termos têm fatores em comum.

O método de agrupamento foi explicado no Capítulo 9. Posso mostrar mais um exemplo aqui, mas você deve voltar ao Capítulo 9 para uma revisão completa.

Ache o valor de x em $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

1. **Use o agrupamento para fatorar o lado esquerdo.**

   $$x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x^2-4) = 0$$

2. **Fatore as expressões dos parênteses, se possível.**

   O segundo fator também pode ser fatorado porque é a diferença entre dois quadrados perfeitos.

   $$(x+1)(x^2-4) = (x+1)(x-2)(x+2) = 0$$

3. **Resolva usando a propriedade do produto nulo.**

   Usando a PPN: ou $x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$, $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = -2$.

Nesse caso, temos três repostas diferentes, mas às vezes você só obtém uma ou duas respostas.

Fatorando cubos com números inteiros

Se você não puder resolver uma equação de terceiro grau encontrando a soma ou a diferença de seus cubos, fatorando ou agrupando (veja o Capítulo 9), você pode tentar mais um método se todas as soluções forem números inteiros.



Para encontrar as soluções quando todas forem números inteiros, siga esses passos:

1. **Escreva a equação cúbica na ordem decrescente de potências da variável. Procure a constante (termo que não tem uma variável) e liste todos os números que dividem esse número de maneira exata.**



   Lembre-se de incluir os números positivos e negativos.

   Digamos que você esteja resolvendo x em $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$. A constante é 15 e a lista de números que dividem a constante sem deixar resto é? $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$. Esta é uma lista longa, mas você sabe que, de uma forma ou de outra, é necessário multiplicar números para obter 15.

2. Encontre um número da lista que torna a equação igual a 0.

Escolha o número 3 para ser o seu primeiro palpite.

Tentando $x = 3$, $(3)^3 - 7(3)^2 + 7(3) + 15 = 27 - 63 + 21 + 15 = 63 - 63 = 0$. Funciona!

3. Divida a constante por esse número.

A resposta para essa divisão é a sua nova constante.

No exemplo, divida a constante original, 15, por 3 e obtenha 5. Essa é a sua nova constante.

4. Faça uma lista de números que dividem a nova constante sem deixar resto.

Faça uma nova lista para a nova constante igual a 5. Os números que dividem 5 sem deixar resto são: ±1, ±5. Dois números são bem melhores do que quatro.

5. Encontre, na nova lista, um número que combine (que torne a equação igual a 0).

Tentando $x = 1$, você tem $(1)^3 - 7(1)^2 + 7(1) + 15 = 1 - 7 + 7 + 15 = 23 - 7 = 16$.

Esse número não funciona, então tente com outro número da lista.

Tentando $x = 5$, $(5)^3 - 7(5)^2 + 7(5) + 15 = 125 - 175 + 35 + 15 = 175 - 175 = 0$.

Agora funciona.

6. Divida a nova constante pela reposta mais recente.

Aquela reposta oferece opções para a última solução.

Ao dividir a nova constante por 5, você obtém 1. Os únicos valores que dividem o número 1 sem deixar resto são 1 ou -1. Por já ter tentado o 1 e não ter funcionado, isso quer dizer que -1 é a última solução.

Tentando $x = -1$, você tem $(-1)^3 - 7(-1)^2 + 7(-1) + 15 = -1 - 7 - 7 + 15 = 0$.

Esse funciona, é claro. Então as suas soluções são: $x = 3,\ x = 5,\ x = -1$.

Isso significa que as três soluções para a equação $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$ são 3, 5 e -1.

Ufa! Esse é um processo e tanto. Tente novamente com os exemplos a seguir.

Ache o valor de y em $y^3 - 4y^2 + 5y - 2 = 0$.

1. Escreva a equação na ordem decrescente das potências das variáveis e encontre a constante. Faça uma lista dos números que dividem a constante sem deixa resto.

A constante nessa equação é igual a -2. Há somente uma pequena lista para esse número: ±1, ±2.

2. **Encontre um número da lista que torne a equação igual a zero.**

   Tente $y = 1$, $(1)^3 - 4(1)^2 + 5(1) - 2 = 1 - 4 + 5 - 2 = 6 - 6 = 0$

   Esse funcionou. A única desvantagem é que quando você tenta tornar a constante menor, ela não funciona nesse caso. Dividir por 1 não muda o valor. Pelo menos, é uma lista pequena. Você deve tentar outro.

3. **Tente outro número.**

   Experimente $y = -1$, $(-1)^3 - 4(-1)^2 + 5(-1) - 2 = -1 - 4 - 5 - 2 = -1 - 11 = -12$

   Esse número não funcionou, então tente o número 2.

   Tentando $y = 2$, $(2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 2 = 8 - 16 + 10 - 2 = 18 - 18 = 0$

   O número 2 funciona. Então, se você divide a constante 2 por 2, você terá 1. Os únicos fatores que funcionam para 1 são ±1. Você já tentou 1 e funcionou. Você tentou -1 e não funcionou. Isso significa que o 1 vai funcionar de novo e você terá uma raiz dupla igual 1 nesse problema.

   As soluções são $x = 1$, $x = 2$.

A maneira como uma raiz dupla ou soluções duplas funcionam nessas equações é que as soluções aparecem duas vezes na forma fatorada. Se você voltar a partir da propriedade do produto nulo e escrever os fatores que dão as soluções para a equação cúbica, a equação vai se parecer com:

$$y^3 - 4y^2 + 5y - 2 = (y-1)(y-1)(y-2) = 0$$

Ou, mostrando a raiz ou solução dupla mais claramente:

$$(y-1)(y-1)(y-2) = (y-1)^2(y-2) = 0.$$

Resolver z em $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0$ é especial porque a equação pode ter até três raízes, mas, sendo a constante igual a -1, as únicas opções são 1 e -1. Ou já somente uma solução, ou uma delas tem que ser repetida. Para determinar qual situação você tem, siga esses passos e tente os valores.

Tentando $z = 1$, temos $(1)^3 - 3(1)^2 + 3(1) - 1 = 1 - 3 + 3 - 1 = 4 - 4 = 0$

Tentando $z = -1$, temos $(-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) - 1 = -1 - 3 - 3 - 1 = -8$

A única solução é $z = 1$.

Trabalhando com equações biquadradas

Algumas equações com potências grandes ou fracionárias são biquadradas. Isso significa que elas têm três termos e:

1. **O primeiro termo tem uma potência par** (4, 6, 8, . . .) **ou** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right)$.
2. **O segundo termo tem uma potência que é metade da primeira potência.**
3. **O terceiro termo é uma constante.**

Em geral, o formato é: $ax^{2n} + bx^{n} + c = 0$. Assim como na equação quadrática geral, o x é a variável e a, b, e c são números constantes. O a não pode ser zero, mas as outras duas letras não têm essa restrição. O n também é uma constante e pode ser qualquer coisa menos zero. Por exemplo, se $n = 3$, então a equação seria $x^6 + bx^3 + c = 0$.

Para resolver uma equação biquadrada, faça de conta que ela é quadrática e use o mesmo método que você usa para elas, acrescido de mais um ou dois passos. Os passos extras normalmente envolvem descobrir uma raiz extra ou elevar a uma potência extra.

Note que cada uma das seguintes equações biquadradas atende a todos os requisitos:

- $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
- $y^6 + 7y^3 - 8 = 0$
- $z^8 + 7x^4 + 6 = 0$
- $w^{1/2} - 7w^{1/4} + 12 = 0$

Quando você reconhece que tem uma equação similar a quadrática, resolva a equação seguindo esses passos:



1. **Reescreva a equação biquadrada como uma equação quadrática real, substituindo as potências atuais por dois e um.**

   Faz sentido mudar as letras das variáveis para que você não confunda a equação reescrita com a original.

2. **Fatore a nova equação para ver qual é o padrão.**
3. **Use o padrão para fatorar o problema original empregando as variáveis originais.**
4. **Use a propriedade do produto nulo para encontrar as soluções.**



A maior potência de uma equação, quando é um número inteiro, diz a você o número de soluções *possíveis*. Desta forma, não haverá mais soluções do que esse número.

Para colocar os passos da resolução para funcionar, resolva x em $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

1. **Reescreva a equação substituindo as potências atuais pelos números dois e um.**

   Reescreva essa equação quadrática usando os mesmos coeficientes (números multiplicadores) e a constante. Mude a letra usada para a variável, para não correr o risco de confundir essa nova equação com a original.

   $$q^2 - 5q + 4 = 0$$

2. **Fatore a equação quadrática.**

   $q^2 - 5q + 4 = 0$ é fatorada muito bem em $(q-4)(q-1) = 0$

3. **Use esse padrão de fatoração para fatorar a equação original.**

   Use o mesmo padrão para fatorar o problema original. Quando você for substituir a variável q na forma fatorada, use x^2. Ao fazer a fatoração, normalmente, você precisa usar essa potência no meio.

   $$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

4. **Resolva a equação usando a propriedade do produto nulo.**

   Agora use a PPN. Ou $x^2 - 4 = 0$ ou $x^2 - 1 = 0$.

   Se $x^2 - 4 = 0$, então $x^2 = 4$ e $x = \pm 2$.

   Se $x^2 - 1 = 0$, então $x^2 = 1$ e $x = \pm 1$.

Essa equação tem quatro soluções diferentes e cumpre com o esperado.

O próximo exemplo apresenta um problema interessante porque os expoentes são frações. Mas ele se encaixa na categoria biquadrada, então vou mostrar como você pode tirar vantagem dessa situação para resolver a equação. E, a regra do número de soluções não funciona da mesma maneira aqui. Não existem quaisquer situações possíveis onde haja uma solução pela metade.

Resolva $w^{1/2} - 7w^{1/4} + 12 = 0$.

1. **Reescreva a equação com potências de dois e um.**

   Reescreva, para ter $q^2 - 7q + 12 = 0$.

2. **Fatore.**

   A equação é facilmente fatorada em $(q-3)(q-4) = 0$.

3. **Substitua as variáveis da equação original, usando o padrão.**

   Substitua com as variáveis originais para ter $(w^{1/4} - 3)(w^{1/4} - 4) = 0$.

4. **Resolva a equação.**

   $(w^{1/4} - 3)(w^{1/4} - 4) = 0$

   Agora, ao usar a propriedade do produto nulo você tem os seguintes resultados: ou $w^{1/4} - 3 = 0$ ou $w^{1/4} - 4 = 0$. Como você resolve equações desse tipo?

Olhe para $w^{1/4} - 3 = 0$. Somando 3 em ambos os lados, você tem $w^{1/4} = 3$. Você pode achar o valor de w se elevar cada lado à Quarta potência. Isso vai fazer você se livrar do expoente fracionário pois quando elevamos uma potência a outra potência, devemos multiplicar os expoentes. Assim, $\left(\frac{1}{4}\right)4 = 1$.

$$\left(w^{1/4}\right)^4 = (3)^4$$

Isso diz que $w = 81$.

Fazendo o mesmo com o outro fator, $w^{1/4} - 4 = 0$, então $w^{1/4} = 4$ e

$$\left(w^{1/4}\right)^4 = (4)^4$$

Isso diz que $w = 256$.

5. **Verifique suas respostas.**

   Se $w = 81$, $(81)^{1/2} - 7(81)^{1/4} + 12 = 9 - 7(3) + 12 = 21 - 21 = 0$

   Se $w = 256$, $(256)^{1/2} - 7(256)^{1/4} + 12 = 16 - 7(4) + 12 = 28 - 28 = 0$

Ambas as soluções funcionam.



Expoentes fracionários representam raízes ou radicais. Então $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$. Se você tem $16^{\frac{1}{4}}$, então isso significa $\sqrt[4]{16}$ ou "Qual o número que multiplicado por ele mesmo quatro vezes te dá como resposta 16?". Nesse caso a reposta é 2.

Expoentes negativos constituem outra característica interessante dessas equações. Como você pode ver quando tenta achar o valor de x em $2x^{-6} - x^{-3} - 3 = 0$.

1. **Reescreva a equação usando potências de dois e um.**

   Reescreva a equação como $2q^2 - q - 3 = 0$.

2. **Fatore.**

   A equação é fatorada em $(2q - 3)(q + 1) = 0$.

3. **Volte para as variáveis e as potências originais.**

   Use esse padrão. Fatore a equação original para ter:

   $$\left(2x^{-3} - 3\right)\left(x^{-3} + 1\right) = 0$$

4. **Resolva.**

   Use a PPN. As duas equações para resolver são $2x^{-3} - 3 = 0$ e $x^{-3} + 1 = 0$.

   Isso se torna $2x^{-3} = 3$ e $x^{-3} = -1$.



   Reescreva as equações usando a definição de expoentes negativos.

   $$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

   Então as duas equações podem ser escritas como $\frac{2}{x^3} = 3$ e $\frac{1}{x^3} = -1$

   Faça a multiplicação cruzada em ambos os casos para ter $3x^3 = 2$ e $x^3 = -1$.

   Divida a primeira equação por 3 para deixar o x^3 sozinho e depois extraia a raiz cúbica de cada lado para achar o valor de x.

   $$x = \sqrt[3]{2/3} \text{ ou } x = \sqrt[3]{-1} = -1$$



Desafios físicos

Um dos mais famosos compositores do mundo foi Beethoven. Seus feitos parecem muito mais incríveis quando você descobre que ele foi surdo por um bom tempo da sua vida e mesmo assim continuou a produzir obras primas musicais.

Uma situação similar aconteceu com o matemático Leonhard Euler. Euler era um dos matemáticos mais criativos da sua geração e produziu mais da metade do seu trabalho depois que ficou cego. Após a cegueira, ele passou a ditar de cor suas descobertas.

Eliminando os radicais

Algumas equações possuem radicais. Essas equações são transformadas em equações lineares ou quadráticas para melhorar a forma de resolvê-las. Equações com radicais aparecem quando fazemos problemas que envolvem distâncias em pontos gráficos e em linhas, assim como, problemas que envolvem o Teorema de Pitágoras – o favorito de Pitágoras que descreve a relação entre os lados de um triângulo retângulo. O processo básico para obter uma solução é se livrar do radical. Remover o radical transforma o problema em algo mais manejável, mas introduz a possibilidade de uma resposta sem sentido ou um erro. Verificar sua resposta é ainda mais importante no caso dos radicais. Assim, quando está ciente de que erros podem ocorrer você deve ficar especialmente atento. Mesmo que isso possa parecer um problema (que essas coisas sem sentido apareçam) se livrar dos radicais ainda é a maneira mais eficiente e fácil de lidar com essas equações.

Elevando ambos os lados ao quadrado

O principal método para lidar com equações que possuem radicais é transformá-las em equações que *não* têm radicais. Você consegue isso ao elevar o radical a uma potência que transforma o expoente em um. Se o radical é uma raiz quadrada, que pode ser escrita como uma potência de um meio, o radical é elevado à segunda potência. Se o radical é uma raiz cúbica, que pode ser escrita como uma potência de um terço, então o radical é elevado à terceira potência. Volte ao Capítulo 14 se precisar revisar expoentes e potências.



Quando a potência fracionária é elevada ao recíproco dessa potência, os dois expoentes são multiplicados resultando em uma potência de um.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(2^{1/2}\right)^2 = 2^1 = 2$$

Isso funciona muito bem quando você tem apenas números. Mas que tal

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = \left((x+1)^{1/2}\right)^2 = (x+1)^1 = x+1?$$

Isso também pode funcionar muito bem, mas alguns problemas podem acontecer quando forem usadas variáveis ao invés de números. As variáveis podem designar números negativos ou valores que permitem negativos dentro dos radicais, o que nem sempre é aparente até você se inteirar do problema e verificar sua reposta.

As equações contendo radicais podem ser lidadas elevando ao quadrado ou elevando cada lado a uma potência apropriada. Lembre-se do princípio: "Faça de um lado da equação o que você fez do outro lado".

Para trabalhar com uma equação com radicais (ou até com uma equação de conservação contendo termos com radicais), siga esses passos:

1. **Coloque o radical sozinho em um lado sinal de igual.**

   Então, se você quer achar o valor de y em $\sqrt{4-5y} - 7 = 0$, some 7 de cada lado para que o radical fique sozinho do lado esquerdo. Fazendo isso, você terá $\sqrt{4-5y} = 7$.

2. **Eleve ambos os lados ao quadrado para remover o radical.**

   Elevando ambos os lados do problema ao quadrado, você tem $4 - 5y = 49$.

3. **Resolva a equação linear resultante.**

   Trabalhando com a equação linear você terá $-5y = 45$ ou $y = -9$.

   Pode parecer estranho que a resposta seja um número negativo, mas o número negativo é multiplicado por outro negativo, que torna a reposta um número positivo. Então você soma 4 dentro do radical.

4. **Verifique sua resposta.**

   Se $y = -9$ então $\sqrt{4-5(-9)} - 7 = 0$ ou $\sqrt{4+45} - 7 = 0$. Isso leva a $\sqrt{49} - 7 = 7 - 7 = 0$. Está certo!

Você pode usar o mesmo método para resolver x em $2\sqrt{x+15} - 3 = 9$.

1. **Coloque o termo com o radical sozinho de um lado da equação.**

   O primeiro passo é somar 3 em ambos os lados:

   $$2\sqrt{x+15} = 12$$

2. **Eleve ambos os lados da equação ao quadrado.**



   Uma das regras para expoentes é a que afirma que o produto de dois números inteiros elevado ao quadrado é igual ao produto de cada um desses números inteiros ao quadrado.

   $$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

   Elevando o lado esquerdo ao quadrado, $\left(2\sqrt{x+15}\right)^2 = 2^2 \cdot \left(\sqrt{x+15}\right)^2 = 4(x+15)$

Elevando o lado direito ao quadrado, $12^2 = 144$

$$4(x+15) = 144.$$

3. Resolvendo *x*.

Distribua $4x + 60 = 144$

Subtraia 60 de ambos os lados.

$$4x = 84 \text{ ou } x = 21.$$

4. Verifique seu trabalho.

$$2\sqrt{x+15} - 3 = 9$$

$$2\sqrt{21+15} - 3 = 2\sqrt{36} - 3 = 2 \cdot 6 - 3 = 12 - 3 = 9$$

Tente agora com esse problema um pouquinho mais complicado: ache o valor de z em $7 + \sqrt{z-1} = z$.

1. Coloque o termo com o radical sozinho do lado esquerdo.

Ao subtrair 7 de cada lado você fica com o radical do lado esquerdo e o binômio do lado direito.

$$\sqrt{z-1} = z - 7$$

2. Eleve ambos os lados da equação ao quadrado.

Deve-se tomar cuidado para elevar o binômio ao quadrado corretamente.

$$\left(\sqrt{z-1}\right)^2 = (z-7)^2$$

$$z - 1 = z^2 - 14z + 49$$

3. Resolva a equação.

Dessa vez você tem uma equação quadrática. Mova tudo para a direita de modo a igualar a equação a 0. Para tanto subtraia z de cada lado e some 1 de cada lado.

$$0 = z^2 - 15z + 50$$

Isso é fatorado em $(z-5)(z-10) = 0$. Usando a propriedade multiplicativa do zero, você pode ter ou $z - 5 = 0$ ou $z - 10 = 0$, que significa que ou $z = 5$ ou $z = 10$, respectivamente.

4. Verifique.

Verifique essas respostas cuidadosamente porque respostas impossíveis normalmente aparecem nesses problemas.

Se $z = 5$, então $7 + \sqrt{5-1} = 7 + \sqrt{4} = 7 + 2 = 9 \neq 5$. O número 5 não funciona.

Se $z = 10$, então $7 + \sqrt{10-1} = 7 + \sqrt{9} = 7 + 3 = 10$. Já o número dez funciona.

A única solução possível é z igual a 10. Tudo bem, algumas vezes esses problemas têm duas repostas, outras apenas uma reposta e, às vezes, eles não possuem nenhuma resposta. O método funciona, você só precisa ser cuidadoso.

Elevando ambos os lados ao quadrado duas vezes

Quando você pensa que as coisas estão bem, surge uma situação na qual você precisará elevar ambos os lados ao quadrado, e não só uma vez, mas duas! Isso acontece quando você tem mais de um radical em uma equação e deixá-los sozinhos de um lado da equação não é possível.

A medida que você vai resolvendo o problema, um binômio é formado com dois radicais ou um radical e outro termo, e você têm que elevar os termos duas vezes ao quadrado para se livrar de todos os radicais. O procedimento é um pouco complicado, mas nada muito terrível. Você pode descobrir como resolver as coisas com a ajuda da explicação a seguir.

Ache o valor de x na equação $\sqrt{x-3} + 4\sqrt{x+6} = 12$ seguindo esses passos:

1. **Coloque um dos radicais em um lado e o outro radical no outro lado do sinal de igual.**

   Mesmo que não possa colocar este ou aquele radical sozinho, tê-los em qualquer um dos lados da equação pode ajudar. Então subtraia $\sqrt{x-3}$ de cada lado para colocá-lo do lado direito com o número 12: $4\sqrt{x+6} = 12 - \sqrt{x-3}$.

2. **Eleve ambos os lados da equação ao quadrado.**

   Do lado esquerdo, use a regra que envolve expoentes quando você eleva um produto ao quadrado. Essa regra foi apresentada no Capítulo 4 e volta a aparecer ali em baixo, no tópico logo depois desse aqui. Do lado direito, elevando um binômio ao quadrado (usando o PEIU), você tem:

   $$\left(4\sqrt{x+6}\right)^2 = \left(12 - \sqrt{x-3}\right)^2$$
   $$16(x+6) = 144 - 24\sqrt{x-3} + \left(\sqrt{x-3}\right)^2$$
   $$16x + 96 = 144 - 24\sqrt{x-3} + x - 3$$

3. **Simplifique e coloque o radical restante sozinho em um lado da equação.**

   No exemplo, simplificar quer dizer fazer a matemática nas constantes – 144 e -3 para obter:

   $$16x + 96 = 141 - 24\sqrt{x-3} + x$$

   Subtraia 141 e x de cada lado:

   $$15x - 45 = -24\sqrt{x-3}$$

4. **Procure um fator comum em todos os termos da equação.**

   Você pode tornar as coisas mais perfeitas dividindo cada lado pelo máximo divisor comum, 3:

   $$\cancel{3}(5x-15)=\cancel{3}\left(-8\sqrt{x-3}\right)$$
   $$5x-15=-8\sqrt{x-3}$$

   Agora você pode elevar ambos os lados ao quadrado mais facilmente.

5. **Eleve ambos os lados da equação ao quadrado.**

   $$(5x-15)^2=\left(-8\sqrt{x-3}\right)^2$$
   $$25x^2-150x+225=64(x-3)$$
   $$25x^2-150x+225=64x-192$$

   Esses números parecem grandes demais.

6. **Coloque tudo de um lado da equação e fatore.**

   Você pode mover tudo para o lado esquerdo e verificar se pode fatorar algo para tornar os números menores. No exemplo, você pode subtrair $64x$ de cada lado e somar 192 de cada lado.

   $$25x^2-214x+417=0$$

   Essa não é uma equação quadrática fácil de fatorar, mas pode ser fatorada em $(25x-139)(x-3)=0$. Então, você tem duas soluções: ou $x=\frac{139}{25}$ ou $x=3$.

7. **Insira as soluções para verificar sua resposta.**

   Se $x=\frac{139}{25}$, então $\sqrt{139/25-3}+4\sqrt{139/25+6}=12$. Quais são as chances disso estar correto? Você pode pegar a sua fiel calculadora para ver se realmente funciona. $\sqrt{64/25}+4\sqrt{289/25}=8/5+4(17/5)=76/5\neq 12$. Depois de tanto esforço descobrimos que a resposta realmente não funciona! Torça para que o número 3 funcione.

   Se $x=3$, então $\sqrt{3-3}+4\sqrt{3+6}=0+4\sqrt{9}=4\cdot 3=12$. Ah, ainda bem!

Dividindo sinteticamente

Equações cúbicas que possuem soluções fáceis e inteiras tornam a vida bem mais fácil! Mas o quão realista é essa afirmação? Muitas vezes as repostas são frações, e também podem ser legais. E se você quiser ampliar seus horizontes e tentar equações de quarto ou quinto graus ou ainda maiores? Tentar respostas até conseguir uma que funcione pode ser muito cansativo.

Um método conhecido como divisão sintética pode ajudar você com todas essas preocupações. A divisão aparenta ser um pouco estranha (ela é sintetizada) e *sintetizar* significa reunir as partes separadas. Isso é, por exemplo, o que um sintetizador faz com a música. Então bote Beethoven para tocar e siga em frente.

Sintetização simples

Divisão sintética é um processo de divisão que economiza tempo. Ela pega os coeficientes de todos os termos em uma equação e oferece um método para encontrar a resposta de um problema de divisão apenas multiplicando e somando. É de certa forma muito legal.

Vamos tentar encontrar soluções para a equação cúbica $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$. Usando o método que envolve listar todas as soluções possíveis – todos os números que dividem a constante sem deixar resto, você vê que o número 24 tem fatores de ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12, ±24. Esse método foi explicado no início deste capítulo em "Fatorando cubos com números inteiros". Tentar diferentes opções pode ser um desafio, mas, ao invés disso, você pode usar a divisão sintética. Escreva os coeficientes (multiplicadores) dos termos em uma fileira.

$$1 \quad 1 \quad -14 \quad -24$$

Agora coloque um sinal de divisão invertido e uma linha abaixo dos números. O sinal da divisão invertido é usado para colocar as opções de divisão na frente dos coeficientes. Esse tipo de símbolo geralmente significa que há um tipo incomum de divisão acontecendo.

_|	1	1	– 14	– 24

Agora traga o primeiro 1 para baixo.

_|	1	1	– 14	– 24
	1			

Agora você está pronto para *chutar*. Se um número da lista de opções é a solução da equação, então o resto (que estará na posição final e mais para a direita) da divisão sintética é 0. Os números na fila de baixo representam os números no quociente da divisão – exceto o último número, que é o resto da divisão. Você quer o 0 na última fila, embaixo do -24. Isso significa que você encontrou uma solução.

Suponha que o número 4 funcione. Coloque o 4 do sinal de divisão engraçado.

4|	1	1	– 14	– 24
	1			

Agora multiplique, some, multiplique, some, multiplique e some. Cada vez, você multiplica o número mais a direita na linha inferior vezes o número no sinal de divisão. Coloque o resultado acima da linha, no próximo espaço a direita, e some os dois números. O número 1 embaixo vezes o número 4 é igual a 4, então o coloque embaixo do segundo 1.

4	1	1	– 14	– 24
		4		
	1			

Some o número 1 e o número 4 para ter 5.

4	1	1	– 14	– 24
		4		
	1	5		

Multiplique o número 5 vezes o número 4 e some o produto ao número -14.

4	1	1	– 14	– 24
		4	20	
	1	5	6	

Mais uma vez com o 6 vezes o 4, e some o produto ao -24.

4	1	1	– 14	– 24
		4	20	24
	1	5	6	0

Eureca! O número 4 funcionou, então é uma solução. Agora, para tentar o próximo palpite, use os números da linha inferior (exceto o último 0). E a lista de opções foi reduzida aos números que dividem 6. Essa linha inferior representa o quociente – ou o resultado da divisão. Ao encontrar 4 como solução, seu fator foi eliminado do processo. Dividindo a constante original, 24, por 4 você tem uma nova constante, 6, e o conjunto de números que o dividem.

	1	5	6
	1		

Tente o número 2 dessa vez.

2	1	5	6
		2	14
	1	7	20

Esse número não funcionou. O resto não é 0.

Tente o número -2.

–2	1	5	6
		– 2	– 6
	1	3	0

Esse funcionou.

A última divisão envolve apenas os dois números restantes.

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & 3 \\ & & \\ \hline & 1 & \end{array}$$

As únicas opções aqui são 3 e -3. Se você quer uma soma de 0, é melhor usar o -3.

$$\begin{array}{r|rr} -3 & 1 & 3 \\ & & -3 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

Esse também funcionou, então suas soluções são $x = 4, -2, -3$.

A divisão sintética é muito útil porque é mais fácil encontrar vários zeros e respostas fracionárias. Frações como respostas aparecem quando o multiplicador do primeiro termo (o termo com a maior potência) é um número além de 1.

Sintetizando com frações

Uma equação como $4x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = 0$, pode ter até três soluções. E duas delas podem ser frações. A divisão sintética é uma boa maneira para encontrar essas respostas, mas você precisa começar a partir da lista de todas as soluções possíveis antes de começar a divisão sintética.

A lista de todas as soluções possíveis para qualquer um desses problemas é composta por:

1. **Todos os números que dividem a constante sem deixar resto.**
2. **Todos os números que dividiram a constante sem deixar resto divididos por todos os números que dividem o coeficiente do termo com a maior potência sem deixar resto.**

No exemplo $4x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = 0$, a lista é composta por:

Primeiro, todos os números que dividem 6 sem deixar resto.

Segundo, por todos os números que dividem 6 sem deixar resto divididos por todos os números que dividem 4 sem deixar resto.

Você pode ver porque o problema é legal quando o coeficiente da maior potência for igual a 1.

A lista de palpites começa, como sempre, com todos os números que dividem 6 sem deixar resto. Então comece com: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. As frações são encontradas dividindo cada um dos fatores de 6 pelos números que dividem 4, o multiplicador do primeiro termo, sem deixar resto. Os números que dividem 4 sem deixar resto são: $\pm1, \pm2, \pm4$.

Se você dividir $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ pelo primeiro par, ±1, nada vai mudar.

Se você divide $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ pelo terceiro par, ±4, terá $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{6}{2} = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 3$. Como pode ver, há algumas repetições da lista original.

Se você divide $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ pelo terceiro par, ±4, terá $\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{2}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{6}{4} = \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{3}{2}$. Novamente há mais repetições, mas a lista está completa. Qualquer resposta fracionária pode ser encontrada nessas listas.

Capítulo 16

Corrigindo desigualdades

Neste capítulo:

- Entendendo inequações
- Considerando as inequações lineares
- Resolvendo inequações quadráticas
- Atacando as equações e inequações modulares

Igualdade é uma palavra muito poderosa nas áreas social, política e humanitária. E não é menos poderosa na matemática, na medida em que os matemáticos também estão interessados nela: a álgebra não teria muito sentido sem a igualdade. Felizmente, a álgebra também sabe lidar com as desigualdades (que, na álgebra, chamamos de inequações). Igualdade é uma importante ferramenta na matemática e na ciência. Este capítulo apresenta para você a inequação algébrica, o que não é exatamente o oposto da equação. Você pode dizer que a inequação algébrica é um pouco parecida com a equação, porém mais suave. Você usa inequações para comparações. A inequação é usada para determinar se alguma coisa é positiva ou negativa – maior ou menor que zero. A inequação permite que você encaixe expressões entre valores do lado menor e do lado maior, como por exemplo, as ondas entre 5 pés e 18 pés.

Inequações algébricas mostram as relações entre um número e uma expressão ou entre dois números. Uma expressão é maior ou menor do que outra para certos valores de uma dada variável. Por exemplo, pode ser que Janice tenha pelo menos quatro gatos a mais do que o dobro de gatos de Eloise. Há muitas respostas que podem ocorrer se estamos falando em *pelo menos* e não em algo exatamente igual.

Equações (afirmações com sinais de igual) são um tipo de relação, elas dizem que duas coisas são exatamente iguais. A relação de desigualdade não é precisa. As coisas que são comparadas podem ser um pouco maiores ou um pouco menores umas que as outras, ainda que haja uma relação entre elas.

Muitas operações com inequações funcionam da mesma forma que as operações com igualdades e equações, mas você precisa prestar atenção a algumas diferenças importantes.

Trabalhando com inequações

Existem muitas semelhanças entre trabalhar com inequações e trabalhar com equações. A parte de balancear ainda continua sendo usada. Quando as operações de multiplicar ou dividir cada lado por um número entrarem em jogo é que as diferenças começam a aparecer.

Os símbolos da inequação são

- **< menor que**
- **> maior que**
- **≤ menor ou igual a**
- **≥ maior ou igual a**



Lembre-se que a *ponta* do sinal fica mais perto do *menor* entre os dois valores.

As regras para operações com inequações são:

Se $a < b$, então $a + c < b + c$ e $a - c < b - c$.

Se $a < b$ e c é positivo, então $a \cdot c < b \cdot c$ e $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Se $a < b$ e c é negativo, então $a \cdot c > b \cdot c$ e $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Somando e subtraindo inequações

Adicionar e subtrair valores em inequações funciona exatamente da mesma maneira que com as equações.

Comece com uma afirmação de desigualdade na qual, apenas ao observá-la, já se possa dizer que é verdadeira. Como, por exemplo, seis é menor do que dez, ou seja, 6 < 10.

O que acontece se você somar a mesma coisa em ambos os lados? Você pode fazer isso numa equação e não alterar a verdade de sua afirmação. Mas e em uma inequação, isso seria possível?

$$6 < 10$$

Some 4 em ambos os lados.

$$6 + 4 < 10 + 4$$

$$10 < 14$$

Dez é menor do que catorze ainda continua sendo uma afirmação verdadeira. Essa demonstração não é suficiente para *provar* nada, mas ilustra uma regra que é verdadeira. Quando você soma qualquer número a ambos os lados de uma inequação, a inequação ainda permanece correta ou verdadeira.

Da mesma forma, quando você subtrai qualquer número de ambos os lados de uma inequação, ela também permanece correta ou verdadeira.

$$10 < 14$$

Subtraia 2 de ambos os lados.

$$10 - 2 < 14 - 2$$

$$8 < 12$$

Oito *é* menor do que doze, então parece que ao somar ou diminuir tudo continua ok. Mas você ficou com números positivos e com resultados positivos. E se somarmos um número negativo em ambos os lados, tornando ambos os lados

$$8 < 12$$

Some -24 em cada lado.

$$8 + (-24) < 12 + (-24)$$

$$-16 < -12$$

Isso ainda é verdade, -16 é mais longe do 0 do que -12.

Multiplicando e dividindo inequações

Agora vêm as operações complicadas. Multiplicação e divisão acrescentam uma nova dimensão ao trabalho com inequações.

Quando multiplicamos ou dividimos ambos os lados de uma inequação por um número *positivo* a inequação continua correta ou verdadeira. No entanto, quando multiplicamos ou dividimos ambos os lados por um número *negativo,* o sinal da inequação deve ser invertido para que a inequação permaneça correta ou verdadeira. Você não poderá nunca multiplicar cada lado por zero, pois isso sempre torna uma inequação falsa. E, é claro, você nunca pode dividir *nada* por zero.

Comece com números positivos, como 20, que é maior do que 12:

$$20 > 12$$

Multiplique cada lado por 4.

$20 \cdot 4 > 12 \cdot 4$

$80 > 48$

Ainda continua verdadeira. Então algum problema?

Você pode ver o problema ao começar com uma nova inequação, como 10 > -3, e multiplicar cada lado por -2.

$10 > -3$

Multiplique cada lado por -2.

$10(-2) > -3(-2)$

$-20 > 6$

Opa! Um número negativo não pode ser maior do que um número positivo.

$-20 < 6$

Que essa multiplicação torna a inequação falsa é uma má notícia. A boa notícia é que inverter o sinal é uma maneira relativamente simples de corrigir isso.



Quando você multiplica cada lado de uma inequação por um número *negativo* (ou divide por um número negativo), inverta sempre o sinal da inequação para que ele aponte para a direção oposta.

Multiplicar ou dividir por um número positivo *não* implica em mudar a direção do sinal. Mas se você usar -6 < 12 e multiplicar cada lado por -3, como em -6(-3) < 12(-3), você precisa inverter o sinal: 18 > -36. Isso faz com que o sinal "menor que" se torne um sinal "maior que".

Agora a divisão. Pegue 18 > -36 e divida cada lado por –9: $\frac{18}{-9} < \frac{-36}{-9}$. Certifique-se de inverter o sinal da inequação de um sinal de maior que para um sinal de menor que: -2 < 4.



No caso das inequações, você não pode nem dividir e nem multiplicar por zero. É claro, dividir por zero é sempre proibido, mas, geralmente, você pode multiplicar expressões por zero (e ter um produto igual a zero). Entretanto, não é possível multiplicar inequações por zero.

Veja o que acontece quando cada lado de uma inequação é multiplicado por zero.

$3 < 7$

$0 \cdot 3 < 0 \cdot 7$

$0 < 0$

Não! Isso não é verdade: zero não é menor e nem maior que ele mesmo. Então, para evitar que o zero tenha um complexo de inferioridade ou superioridade, não use zero para multiplicar inequações.

Resolvendo inequações lineares

Inequações lineares, assim como as equações lineares, são aquelas nas quais o expoente da variável não é maior que um. Resolvê-las é muito semelhante a resolver equações lineares. A principal coisa a ser lembrada é de inverter o símbolo da inequação quando você multiplicar ou dividir por um número negativo – e somente por ele. Você deve ter em mente, também, que é possível obter não somente uma única resposta, mas um grupo de respostas – um número *infinito* de respostas. Esses números, que são *todas* as respostas para a inequação, terão que satisfazer algumas qualificações. Por exemplo, todos eles podem ser maiores que certo número ou menores que certo número ou estar entre dois números distintos. A resposta ou solução pode ser algo do tipo x é maior que três, então todos os números maiores que três poderão substituir x e tornar a inequação uma afirmação verdadeira.

Aqui há alguns exemplos para demonstrar as semelhanças e diferenças entre trabalhar com equações e inequações.

1. **Mova todos os termos com variáveis para um lado.**

   Ache todos os valores de x que funcionam em $4x - 2 < x + 10$

   Comece com esse problema como se fosse resolver uma equação. Mova todas as variáveis x para a esquerda e os números para a direita. Primeiro subtraia x em ambos os lados.

   $$4x - x - 2 < x - x + 10$$

   $$3x - 2 < 10$$

   Agora some 2 em ambos os lados.

   $$3x - 2 + 2 < 10 + 2$$

   $$3x < 12$$

2. **Divida cada lado pelo coeficiente da variável.**

   Desde que o número usado para dividir seja positivo, você pode deixar o sinal da inequação na posição original. Divida por +3.

   $$\frac{3x}{3} < \frac{12}{3}$$

   $$x < 4$$

   A resposta diz que qualquer número menor do que 4 torna a inequação do problema original uma afirmação verdadeira. Infelizmente, não há verificação suficiente para afirmar isso. Você pode tentar alguns números testes para ter certeza que você não se esqueceu de inverter o sinal da inequação. Vamos tentar alguns mais abaixo.

3. **Verifique sua resposta.**

   Se as respostas para $4x - 2 < x + 10$ são $x < 4$, então o seguinte deveria funcionar:

   Se $x = 3$, então $4(3) - 2 < 3 + 10$, ou $10 < 13$. Essa resposta funciona.

   Se $x = -10$, então $4(-10) - 2 < -10 + 10$, ou $-42 < 0$. Essa resposta também funciona.

No próximo problema você deve achar os valores de z em $-2(3z + 4) > 10$.

Nesse caso, o termo com a variável já está do lado esquerdo. O próximo passo seria distribuir o -2 pelos termos no lado esquerdo. Mas, devido ao fato do número 2 dividir 10 sem deixar resto, um passo alternativo pode fazer você evitar a distribuição. É uma boa opção quando a divisão não resulta em nenhuma fração. De qualquer forma, você deve seguir em frente e distribuir.

1. **Divida cada lado por -2.**

   $$\frac{-2(3z+4)}{-2} < \frac{10}{-2}$$

   $3z + 4 < -5.$

   Note que o sinal da inequação foi invertido.

2. **Subtraia 4 de cada lado.**

   $3z + 4 - 4 < -5 - 4$

   $3z < -9$

3. **Divida cada lado por 3.**

   $$\frac{3z}{3} < \frac{-9}{3}$$

   $z < -3$

4. **Verifique.**

   Se usarmos $z = -9$, então $-2([3(-9)] + 4) > 10$, ou $-2(-27 + 4) > 10$

   $-2(-23) > 10$, ou $46 > 10$

Funciona!

Trabalhando com mais de duas expressões

Uma grande vantagem que as inequações têm sobre as equações é que elas podem ser expandidas ou estendidas, e você pode fazer mais de uma comparação ao mesmo tempo. Veja essa afirmação:

$2 < 4 < 7 < 11 < 12$

Você pode criar outra afirmação verdadeira extraindo dois pares de números da inequação, desde que você escreva-os na mesma ordem. Eles nem precisam estar do lado um do outro. Por exemplo:

$4 < 12$ ou $2 < 11$ ou $2 < 12$

No entanto, uma coisa que você *não* pode fazer é misturar inequações, ir em direções *opostas*, numa mesma afirmação. Você *não* pode escrever, por exemplo, $7 < 12 > 2$.

As operações nessas expressões de inequações múltiplas usam as mesmas regras usadas nas expressões lineares (consulte o tópico "Trabalhando com inequações" no começo desse capítulo). Você só as expande para cada segmento ou parte.

Aqui está a primeira afirmação: $2 < 4 < 7 < 11 < 12$

Some 5 em cada parte: $7 < 9 < 12 < 16 < 17$

Multiplique cada parte por -1 e, é claro, inverta o sinal da inequação:

$-7 > -9 > -12 > -16 > -17$

Com essa informação encontre os valores de x em $-3 \leq 5x + 2 < 17$.



Note que o sinal "menor ou igual a" e o sinal "menor que" são usados na mesma afirmação. Isso é permitido porque ambos estão na mesma direção.

1. **O objetivo é colocar a variável sozinha no meio. Comece diminuindo 2 em cada parte.**

   $-3 - 2 \leq 5x + 2 - 2 < 17 - 2$

   $-5 \leq 5x < 15$

2. **Agora divida cada parte por 5. O número é positivo, então não inverta o sinal da inequação.**

   $-1 \leq x < 3$

   Isso diz que x é maior ou igual a -1 e, ao mesmo tempo, é menor do que 3. Algumas soluções possíveis são: $0, 1, 2, -\frac{1}{2}, 2.9$.

3. **Verifique o problema usando duas dessas possibilidades.**

   Se $x = 1$, então $-3 \leq 5(1) + 2 < 17$, ou $-3 \leq 7 < 17$

   É verdadeiro.

   Se $x = \frac{-1}{2}$, então $-3 \leq 5\left(\frac{-1}{2}\right) + 2 < 17$, ou $-3 \leq \frac{-1}{2} < 17$.

   Essa também funciona.

Tente resolver x em $16 > 1 - 3x > 7$.

1. **Comece subtraindo 1 de cada parte.**

   $16 - 1 > 1 - 1 - 3x > 7 - 1$

   $15 > -3x > 6$

2. **Agora divida cada parte por -3, que significa inverter cada um dos sinais da inequação.**

   $\frac{15}{-3} < \frac{-3x}{-3} < \frac{6}{-3}$

   $-5 < x < -2$

   Isso indica que x tem que ser um número entre -5 e -2. Alguns exemplos de números que funcionariam são: -4, -3, -2.1.

3. **Verifique.**

   Você pode notar que, se $x = -3$, então $16 > 1 - 3(-3) > 7$, ou $16 > 10 > 7$.

   Parece funcionar!

Resolvendo inequações quadráticas

Uma *inequação quadrática* é uma inequação que envolve um termo com uma potência de segundo grau. As regras para adição, subtração, multiplicação e divisão de inequações ainda funcionam, mas o passo final para resolver esse tipo de inequação é diferente. Resolver essas inequações quadráticas é quase como montar um quebra-cabeça que vai ficando mais claro à medida que você vai progredindo na montagem. Os passos para lidar com esse tipo de inequação aparecem a seguir:

Observe essa inequação quadrática: $x^2 + 3x > 4$.

As respostas para essas inequações podem seguir em mais de uma direção – as soluções podem ser menores do que um número e maiores do que outro número – então eu vou mostrar que essas coisas podem funcionar antes de mostrar a você como resolvê-las.

Dê alguns palpites sobre o que funcionaria para o x nessa expressão.

- Por exemplo, se $x = 2$, então $(2)^2 + 3(2)$ é $4 + 6$; $10 > 4$,
- Também, se $x = 5$, então $(5)^2 + 3(5)$ é $25 + 15$; $40 > 4$
  número 5 também funciona. Parece que quanto maior melhor.
- Se $x = 0$, então $(0)^2 + 3(0)$ é $0 + 0$; 0 *não* é > 4, então o 0 não funciona. E os números negativos?
- Agora, se $x = -6$, então $(-6)^2 + 3(-6)$ é $36 - 18$; $18 > 4$, então -6 funciona.
  Alguns números negativos funcionaram, assim como alguns números positivos também funcionaram. Mas existe um método que você pode usar para descobrir que números funcionam ou não sem precisar arriscar todos esses palpites.



Para resolver inequações quadráticas, siga esses passos:

1. **Mova todos os termos para um dos lados para que os termos sejam maiores ou menores que zero.**
2. **Fatore.**
3. **Encontre todos os valores do lado fatorado que tornam esse lado igual à zero.**
4. **Faça um gráfico listando todos os valores, em ordem, que tornam a expressão igual a zero. Deixe espaços entre os números para os sinais. Determine os sinais (positivo ou negativo) entre esses valores que tornam a expressão igual a zero. Escreva os sinais no gráfico.**

Tente os passos acima na inequação quadrática $2x^2 + 5x \geq 12$.

1. **Mova todos os termos para um dos lados.**

   Primeiro, mova o número 12 para a esquerda subtraindo 12 de cada lado.

   $$2x^2 + 5x - 12 \geq 12 - 12$$

   $$2x^2 + 5x - 12 \geq 0$$

2. **Fatore.**

   Fatore a equação quadrática da esquerda usando a fatoração por soma e produto (desfazer o PEIU).

   $$(2x - 3)(x + 4) \geq 0$$

3. **Encontre todos os valores de x que tornam o lado fatorado igual à zero.**

   Neste caso, existem dois valores. Usando a propriedade multiplicativa do zero você obtém $2x - 3 = 0$ ou $x + 4 = 0$, o que resulta em $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -4$.

4. **Faça um gráfico listando os valores do passo 3 e determine os sinais da expressão entre os valores do gráfico.**

   Olhe *entre* $\frac{3}{2}$ e -4. A expressão é *igual* a 0 quando x é $\frac{3}{2}$ ou -4. A expressão é positiva para todos os números entre esses dois números que a tornam igual à zero ou é negativa para todos os números entre esses dois números que a tornam igual a zero. Apenas testando um dos números entre eles você poderá saber o que vai acontecer com *todos* eles. Primeiro coloque esses números na ordem do menor para o maior. Isso colocará o -4 antes do $\frac{3}{2}$.

5. **Volte para o problema depois que ele foi mudado para ter 0 de um lado e tente alguns números menores do que o menor valor de *x*, alguns maiores do que o maior valor de *x* e, também, os números entre esses dois valores.**

   Neste caso, você deve tentar os números menores do que -4, entre -4 e $\frac{3}{2}$, e os maiores do que $\frac{3}{2}$.

   Use $2x^2 + 5x - 12 \geq 0$

Primeiro escolha alguns números menores do que -4.

Se $x = -5$, então $2(-5)^2 + 5(-5) - 12 = 50 - 25 - 12 = +13$

Se $x = -10$, então $2(-10)^2 + 5(-10) - 12 = 200 - 50 - 12 = +138$

Na verdade, independente de qual número menor que -4 for escolhido, você vai sempre obter um número positivo. Então escreva isso no espaço à esquerda do -4.

Positivo -4 ________ $\frac{3}{2}$ ________

Agora tente alguns números entre -4 e $\frac{3}{2}$.

Se $x = -2$, então $2(-2)^2 + 5(-2) - 12 = 8 - 10 - 12 = -14$

Se $x = 1$, então $2(1)^2 + 5(1) - 12 = 2 + 5 - 12 = -5$

Independente de qual número entre esses dois números você escolher, o resultado obtido vai ser sempre um número negativo. Então escreva isso no espaço no meio.

Positivo -4 Negativo $\frac{3}{2}$

Apenas mais uma informação para checar. Veja alguns números maiores do que $\frac{3}{2}$.

Se $x = 2$, então $2(2)^2 + 5(2) - 12 = 8 + 10 - 12 = 6$.

Se $x = 10$, então $2(10)^2 + 5(10) - 12 = 200 + 50 - 12 = 238$.

Independente de qual número maior que $\frac{3}{2}$, for escolhido, você sempre vai obter um número positivo. Então escreva isso no último espaço.

Positivo -4 Negativo $\frac{3}{2}$ Positivo

6. **Olhe novamente para a afirmação da inequação para descobrir quais números inserir.**

   O problema exemplo é $2x^2 + 5x - 12 \geq 0$.

   A inequação avisa que a expressão é maior ou igual a 0. Qualquer número que seja *maior do que* 0 é sempre um número positivo. Então você está realmente interessado em quando essa expressão é positiva. De acordo com o gráfico, a expressão é positiva quando x é menor do que -4 e, novamente, quando x é maior do que $\frac{3}{2}$.

7. **Escreva a resposta.**

   Então $x \leq -4$ ou $x \geq \frac{3}{2}$.

O resultado para x é uma grande quantidade de números – todos os números negativos menores do que -4 e todos os números positivos maiores do que $\frac{3}{2}$, até mesmo números muito grandes ou muito pequenos. Os únicos números que não funcionam são aqueles que estão entre -4 e $\frac{3}{2}$.

Nesse exemplo, você resolve y em $y^2 + 8y + 15 < 0$.

1. **Todos os termos já estão de um lado.**
2. **Fatore.**

   $(y + 3)(y + 5) < 0$
3. **Encontre os valores de y que tornam a expressão fatorada igual a zero.**

   Dessa vez, mesmo que os valores de y que tornam o lado esquerdo igual a 0 não façam parte da solução, você ainda precisa deles para encontrar as resposta. Os números que você quer são -3 e -5.
4. **Faça um gráfico usando os valores que tornam a expressão igual a zero.**

   Quando $y = -3$ ou $y = -5$, o lado esquerdo da expressão é igual a zero. Coloque-os na ordem do menor para o maior. Deixe os espaços novamente, preencha-os com os sinais *positivos* e *negativos*.

   ________ –5________ –3 ________
5. **Preencha os espaços entre os números do gráfico com os sinais da expressão.**

   Olhando para a expressão original, $y^2 + 8y + 15 < 0$, observe os números em cada uma das três áreas e preencha os espaços.

   Se $y = -6$, então $(-6)^2 + 8(-6) + 15 = 36 - 48 + 15 = +3$: positivo

   Se $y = -4$, então $(-4)^2 + 8(-4) + 15 = 16 - 32 + 15 = -1$: negativo

   Se $y = 1$, então $(1)^2 + 8(1) + 15 = 1 + 8 + 15 = +24$: positivo

   Positivo –5 Negativo –3 Positivo

   A afirmação original, $y^2 + 8y + 15 < 0$, é verdadeira quando o valor da expressão é menor que 0 ou negativo. Então os números entre -5 e -3 são soluções da inequação.
6. **Escreva isso:**

   $-5 < y < -3$

Dessa vez são somente os números do meio; a solução não inclui o -5 ou o -3.

Trabalhando sem zeros

Algumas vezes os valores que transformam uma expressão em uma inequação igual a zero são inexistentes. Isso significa que a expressão nunca muda de sinal, é sempre negativa ou sempre positiva. Você tem apenas que determinar se qualquer número resolve o problema, ou se nenhum número resolve.

Por exemplo, a expressão $x^2 + 4$ na inequação $x^2 + 4 \geq 0$ não pode ser fatorada. E qualquer número que substitui x te dará um valor positivo na esquerda. Então essa afirmação é *sempre* positiva e a inequação é verdadeira para todos os números.

Lidando com mais de dois fatores

Mesmo que esse tópico envolva problemas que são inequações quadráticas (uma inequação que tem pelo menos um termo elevado ao quadrado e um sinal de maior ou menor que), alguns outros tipos de inequações pertencem ao mesmo tópico porque você lida com elas da mesma maneira. Você pode realmente ter qualquer número de fatores e qualquer disposição de fatores e determinar o positivo ou o negativo para achar a resposta, como mostra o exemplo.

- Ache os valores de x que funcionam em $(x - 4)(x + 3)(x - 2)(x + 7) > 0$.

  Esse problema já está fatorado, então você pode determinar com facilidade que os números que tornam a expressão igual a 0 são $x = 4, x = -3, x = 2, x = -7$.

  Coloque-os em ordem, do menor para o maior, e deixe os espaços entre eles.

  ______ –7 ______ –3 ______ 2 ______ 4 ______

  Dessa vez, coloque os valores teste de volta a forma fatorada. É mais fácil do que multiplicá-los. Os números vão ficar muito grandes, de qualquer maneira.

  Se $x = -8$, então $(-8 - 4)(-8 + 3)(-8 - 2)(-8 + 7) = (-12)(-5)(-10)(-1)$: positivo

  O resultado dessa multiplicação é +600, mas, na verdade, você não precisava saber o valor do número, somente o fato de que existem quatro sinais negativos que te dizem que o produto é positivo.



  Ao multiplicar ou dividir números inteiros, se o número de sinais negativos no problema for par, o resultado é positivo. Se o número de sinais negativos no problema for ímpar, o resultado é negativo. Por exemplo, nesse problema:

  Se $x = -5$, então $(-5 - 4)(-5 + 3)(-5 - 2)(-5 + 7) = (-9)(-2)(-7)(+2)$: negativo

  Se $x = 0$, então $(0 - 4)(0 + 3)(0 - 2)(0 + 7) = (-4)(+3)(-2)(+7)$: positivo

  Se $x = 3$, então $(3 - 4)(3 + 3)(3 - 2)(3 + 7) = (-1)(+6)(+1)(+10)$: negativo

  Se $x = 5$, então $(5 - 4)(5 + 3)(5 - 2)(5 + 7) = (+1)(+8)(+3)(+12)$: positivo

Agora, preenchendo os espaços,

Positivo –7 Negativo –3 Positivo 2 Negativo 4 Positivo

Tendo em vista que o problema original está procurando por valores que tornam a expressão maior que zero ou positiva, então a solução inclui números menores que -7, entre -3 e 2 e maiores que 4. Ou seja,

$x < -7$ ou $-3 < x < 2$ ou $x > 4$

Por favor, veja mais um exemplo. No caso de você ter tido a impressão de que essas inequações têm um padrão positivo-negativo-positivo legal, esse exemplo mostra que você sempre precisa reservar um tempinho para verificar os sinais cuidadosamente.

- Ache os valores de x em $(x - 1)^2(3 - x)(x + 2) \leq 0$.

  Os números que tornam a expressão igual a 0 são x = 1, 3, -2. Coloque-os em ordem.

  ________ –2 ________ 1 ________ 3 ________

  Verifique *entre* os zeros:

  Se $x = -3$, então $(-3 - 1)^2(3 - [-3])(-3 + 2) = (+16)(+6)(-1) = -96$: negativo

  Se $x = 0$, então $(0 - 1)^2(3 - 0)(0 + 2) = (+1)(+3)(+2) = +6$: positivo

  Se $x = 2$, então $(2 - 1)^2(3 - 2)(2 + 2) = (+1)(+1)(+4) = +4$: positivo

  Se $x = 4$, então $(4 - 1)^2(3 - 4)(4 + 2) = (+9)(-1)(+6) = -54$: negativo

  Preencha os espaços:

  Negativo –2 Positivo 1 Positivo 3 Negativo .

  Neste caso, você precisa de variáveis (x) que tornam a expressão negativa ou zero. Você pode observar que valores menores que -2 e maiores do que 3 funcionam. Então faça todos os 0 – os números separando os espaços. Note que o número 1 funciona, embora esteja isolado entre áreas positivas.

  As respostas são:

  $x \leq -2$ ou $x = 1$ ou $x \geq 3$.

Entendendo inequações fracionárias

Desigualdades com frações são outro tipo especial de inequação que se enquadram sob o título geral de inequações quadráticas por causa da maneira que você as resolve. Tente fazer como com as inequações que lidam com mais de dois fatores encontrando onde a expressão é igual a zero. Na verdade, observe

separadamente o que torna o numerador (parte de cima) igual a zero e o que torna o denominador (parte de baixo) igual a zero. Verifique as áreas entre os zeros e depois escreva a resposta.



O grande cuidado com essas inequações é não incluir qualquer número na resposta que torna o denominador da fração igual a zero. Isso gera uma situação impossível, assim como uma fração impossível. Então por que devemos observar o valor que torna o denominador igual a zero? O número zero separa os números positivos dos negativos, mesmo que o zero não possa ser usado na solução, ele indica onde o sinal muda de positivo para negativo ou de negativo para positivo.

- Tente achar os valores de y em $\frac{(y+4)}{(y-3)} > 0$.

  Visto que as regras que envolvem os sinais das respostas na multiplicação e na divisão são as mesmas (um número ímpar de sinais negativos representa uma resposta negativa, um número par de sinais negativos representa uma resposta positiva), você usa o mesmo procedimento com as equações quadráticas de mais de dois termos.

  Os números que tornam o numerador ou denominador igual a 0 são:

  $y = -4$ ou $y = 3$

  Fazendo o gráfico:

  _________ –4 _________ 3 _________.

  Se $y = -5$, então $\frac{(-5+4)}{(-5-3)} = \frac{-1}{-8} = +\frac{1}{8}$: positivo

  Se $y = 0$, então $\frac{(0+4)}{(0-3)} = \frac{4}{-3} = \frac{-4}{3}$: negativo

  Se $y = 4$, então $\frac{(4+4)}{(4-3)} = \frac{8}{1} = +8$: positivo

  Completando o gráfico:

  Positivo –4 Negativo 3 Positivo

  O problema apenas pede os valores que tornam a expressão maior que zero ou positiva, então a solução é: $y < -4$ ou $y > 3$.

- Ache os valores de z em $\frac{(z^2-1)}{(z^2-9)} \leq 0$

  Os números que tornam o numerador ou denominador igual a 0 são:

  $z = +1, -1, +3, -3.$

  O gráfico:_________–3, _________–1_________ 1 _________ 3_________

  Se $z = -4$, então $\frac{([-4]^2-1)}{([-4]^2-9)} = +\frac{15}{7}$: positivo

Se $z = -2$, então $\frac{([-2]^2-1)}{([-2]^2-9)} = -\frac{3}{5}$: negativo

Se $z = 0$, então $\frac{([0]^2-1)}{([0]^2-9)} = +\frac{1}{9}$: positivo

Se $z = 2$, então $\frac{([2]^2-1)}{([2]^2-9)} = -\frac{3}{5}$: negativo

Se $z = 5$, então $\frac{([5]^2-1)}{([5]^2-9)} = +\frac{24}{16}$: positivos

Agora o gráfico fica da seguinte maneira:

Positivo –3 Negativo –1 Positivo 1 Negativo 3 Positivo

A expressão original é:

$$\frac{(z^2-1)}{(z^2-9)} \leq 0$$

Posto que você esteja procurando valores para z que tornam a expressão negativa, você quer os valores entre -3 e -1 e aqueles entre 1 e 3.Você também quer valores que tornem a expressão igual a 0 e isso inclui somente os números que tornam o *numerador* igual a 0, o 1 e o -1. A resposta é escrita da seguinte maneira:

$$-3 < z \leq -1 \text{ ou } 1 \leq z < 3.$$

Note que o símbolo < é usado entre o -3 e o 3 para que eles não sejam incluídos na resposta.

Trabalhando com inequações modulares

Inequações modulares são somente aquilo que elas dizem que são: inequações que têm símbolos de valores absolutos em algum lugar no problema.



$|a|$ é igual a a se a for um número positivo ou 0. $|a|$ é igual ao oposto de a, $-a$, se a for um número negativo.

Então $|3| = 3$ e $|-4| = 4$.

Equações e inequações modulares podem parecer com:

$$|x| = 7 \quad |2x+3| > 7 \quad |5x+1| \leq 9$$

Resolvendo equações modulares

Antes de lidar com inequações, dê uma olhada em *equações modulares*. Uma equação como $|x| = 7$ é muito fácil de ser decifrada. É só encontrar valores de x que têm 7 como resposta quando você usa o símbolo de valor absoluto. Duas respostas, 7 e -7, possuem um valor absoluto de 7. Mas e algo um pouco mais complicado, como $|3x + 2| = 4$?



Para resolver uma equação modular com a forma $|ax + b| = c$, transforme a equação modular em duas equações lineares equivalentes e as resolva.

$|ax + b| = c$ é equivalente a $ax + b = c$ e $ax + b = -c$

Note que o lado esquerdo é o mesmo em ambos os casos. O c é positivo na primeira equação e negativo na segunda equação porque a expressão dentro do símbolo de valor absoluto pode ser positiva ou negativa – o valor absoluto torna as duas expressões positivas quando utilizado.

Resolva x em $|3x + 2| = 4$.

1. **Reescreva na forma de duas equações lineares.**

   $3x + 2 = 4$ ou $3x + 2 = -4$

2. **Ache o valor da variável em cada uma das equações.**

   Subtraia 2 de cada lado da equação:

   $3x = 2$ ou $3x = -6$

   Divida *cada* lado, em cada equação, por 3:

   $x = \frac{2}{3}$ or $x = -2$

3. **Verifique.**

   Se $x = \frac{2}{3}$, então $\left|3\left(\frac{2}{3}\right) + 2\right| = |2 + 2| = |4| = 4$

   $x = -2$, então $|3(-2) + 2| = |-6 + 2| = |-4| = 4$

Ambas as repostas funcionam.

No entanto, resolver x em $|5x - 2| + 3 = 0$, é um caso no qual você não deseja que a equação seja igual a zero. Para fazer uso da regra pra mudar para equações lineares, você tem que ter o valor absoluto sozinho em um lado da equação.

1. **Coloque a expressão do valor absoluto sozinho em um lado da equação.**

   Somando -3 em cada lado:

   $|5x - 2| = -3$

2. Reescreva as duas equações lineares.

$5x - 2 = -3$ ou $5x - 2 = +3$

3. Resolva as duas equações achando o valor da variável.

Some 2 de cada lado das equações.

$5x = -1$ ou $5x = 5$

Divida cada lado por 5:

$x = -\frac{1}{5}$ ou $x = 1$

4. Verifique.

Se $x = -\frac{1}{5}$

então, $|5\left(-\frac{1}{5}\right) - 2| = |-1 - 2| = 3$

Opa! Era para ser -3.Tente o outro número.

Se $x = 1$, então, $|5(1) - 2| = |1 - 2| = 3$

Essa também não funcionou!

Você deveria ter percebido, pra começo de conversa, que a equação era impossível (se tivesse notado isso antes de ter começado a resolução, teria economizado tempo). A definição de valor absoluto diz que o valor do módulo é sempre *positivo*. O valor absoluto igual a -3 oferece uma situação impossível de resolver. Não é de se estranhar que você não tenha obtido resposta!

Resolvendo inequações modulares

Resolver inequações modulares acarreta dois diferentes procedimentos juntos. O primeiro envolve os métodos usados para lidar com o valor absoluto e o segundo envolve as regras usadas para resolver inequações. Você talvez diga que é o melhor dos dois mundos, ou não...



Para resolver uma inequação modular com a forma $|ax + b| > c$, mude a inequação modular em duas inequações equivalentes e as resolva.

$|ax + b| > c$ é equivalente a $ax + b > c$ ou $ax + b < -c$



Para resolver uma inequação modular com a forma $|ax + b| < c$, mude a inequação modular em uma inequação equivalente e as resolva.

$|ax + b| < c$ é equivalente a $-c < ax + b < c$

Esse primeiro exemplo envolve o sinal *maior que* e usa a regra para transformar o problema em algo possível.

Ache o valor de x em $|2x - 5| > 7$.

1. **Reescreva as duas inequações.**

   $2x - 5 > 7$ ou $2x - 5 < -7$

2. **Resolva cada inequação.**

   Some 5 de cada lado em cada inequação.

   $2x > 12$ ou $2x < -2$

   Divida por 2.

   $x > 6$ ou $x < -1$

Este segundo exemplo envolve o sinal *menor que* e usa a segunda parte da regra para transformar o problema em algo possível.

Ache o valor de x em $|5x + 1| < 9$

1. **Reescreva as duas inequações.**

   $-9 < 5x + 1 < 9$

2. **Resolva a inequação.**

   Subtraia 1 de cada parte.

   $-10 < 5x < 8$

   Agora divida por 5.

   $-2 < x < \frac{8}{5}$

Ache o valor de x em $|5x - 2| + 1 \leq 9$.

1. **Coloque a parte com o valor absoluto sozinho de um lado.**

   Você não pode aplicar a regra até que você subtraia 1 de cada lado.

   $|5x - 2| \leq 8$

2. **Reescreva.**

   $-8 \leq 5x - 2 \leq 8$

   Some 2 em cada parte.

   $-6 \leq 5x \leq 10$

   E, agora, divida por 5.

   $-\frac{6}{5} \leq x \leq 2$

Inequação é um tipo especial de relação que apresenta semelhanças e diferenças em relação a uma equação. As regras diferentes para lidar com tipos de problemas diferentes não são difíceis, mas você tem que segui-las fielmente e com precisão.

Parte IV

Aplicando a álgebra

A 5ª onda Por Rich Tennant



"Davi está usando álgebra para calcular a gorjeta. Bárbara – você se importaria de ser um expoente fracionário?".

Nesta parte...

Nenhum livro de álgebra pode estar completo sem falar sobre como aplicar a álgebra em situações do dia a dia. Esta parte te dá motivação para fazer toda a preparação e trabalhar o que aprendeu nas outras partes. Fórmulas e problemas com histórias possibilitam as aplicações mais freqüentemente usadas da álgebra. Adicione alguns gráficos para ajudar e você terá tudo!

Capítulo 17

Fazendo as fórmulas se comportarem

Neste capítulo:

- Lidando com unidades de medida
- Usando o Teorema de Pitágoras
- Trabalhando com o perímetro
- Determinando o volume
- Contando com combinações e permutações
- Formulando suas próprias fórmulas

Eu me lembro da solicitação do meu primeiro empréstimo para comprar um carro. Foi uma experiência traumática! O formulário de solicitação foi o primeiro desafio. Mas a parte mais misteriosa e impressionante de toda a experiência foi quando o funcionário da carta de crédito sentou do outro lado da mesa com sua calculadora e começou a digitar os números. Era como se ele estivesse apertando botões há horas. Ele parava e pensava, apertava mais números e franzia as sobrancelhas. E depois olhou para mim, sorriu e disse: "Sim. Aprovado". Qual a fórmula que ele estava usando? Eu nunca vou saber.

A maioria das fórmulas da vida não é tão assustadora. E as fórmulas que são um pouco mais complicadas podem ser resolvidas com um pouco de conhecimento e uma boa dose de confiança. Esse capítulo todo é sobre ganhar experiência, conhecimento e confiança.

Quando você usa álgebra no mundo real, na maioria dos casos você usa uma fórmula pra ajudar a resolver problemas. Felizmente, quando falamos de fórmulas algébricas, você não precisa fazer um esforço como se fosse reinventar a roda: você pode usar as fórmulas padrão e consagradas para resolver alguns problemas comuns do dia a dia.

Nem todas as fórmulas com as quais você se depara por aí devem constar neste capítulo. Mas deve haver muita explicação e prática nas que estão aqui para ajudar você a lidar com qualquer uma que apareça no seu caminho. Neste capítulo, você vai passear por (ou trabalhar com?) algumas fórmulas que você pode usar repetidamente.

Fazendo medições

Algumas preocupações universais – e algumas começam muito cedo – são as que lidam com medidas. Qual é à distância? Qual é o seu tamanho? De quanto espaço você precisa? Quanto de papel de embrulho você vai precisar? Todas essas perguntas têm a ver com medições e, geralmente, com fórmulas.

Encontrando o tamanho: unidades de medida

Antes que as medidas fossem padronizadas, elas variavam de acordo com quem estava fazendo as medições: uma jarda era a distância da ponta do nariz até o final de um braço esticado; um pé, bem, você provavelmente pode adivinhar do onde essa medida veio, e uma polegada era, freqüentemente, o comprimento do segundo osso do dedo indicador. Talvez o "homem perfeito" tenha sido modelado com as medidas usadas nos dias de hoje.

As unidas de medida mais comumente usadas nos Estados Unidos são polegadas, pés, jardas e milhas.

Algumas medidas equivalentes são: 12 polegadas = 1 pé, 3 pés = 1 jarda, 5.280 pés = 1 milha.

Você pode transformar essas equivalências em fórmulas dizendo:

- Pés para polegadas: número de pés = número de polegadas × 12.
- Polegadas para pés: número de pés = número de polegadas ÷ 12.
- Jardas para pés: número de pés = número de jardas × 3.
- Milhas para pés: número de pés = número de milhas × 5.280.

A melhor maneira de lidar com essas e outras medidas é escrever uma proporção. Para revisar as propriedades das proporções, olhe o Capítulo 13.

Ao usar uma proporção para resolver um problema de medição, escreva polegadas sobre polegadas e pés sobre pés (as mesmas unidades sobre as mesmas unidades). Por exemplo:

- Quantas polegadas existem em 8 pés?

  12 polegadas = 1 pé

  Isso é o que nós sabemos.

  $$\frac{12 \text{ polegadas}}{x \text{ polegadas}} = \frac{1 \text{ pés}}{8 \text{ pés}}$$

  O *problema* está na parte de baixo. Agora faça a multiplicação cruzada.

  $12 \times 8 = x \times 1$

  $x = 96$ polegadas

  Em oito pés encontramos 96 polegadas.

- Você está em um avião e o piloto diz que você está navegando em 14.000 pés. Qual a altura em milhas?

$$5.280 \text{ pés} = 1 \text{ milha}$$

$$\frac{5.280 \text{ pés}}{14.000 \text{ pés}} = \frac{1 \text{ milha}}{x \text{ milha}}$$

Faça a multiplicação cruzada.

$$5.280 \times x = 14.000 \times 1$$

$$5.280x = 14.000$$

$$x = \frac{14.000}{5.280} = 2\,\frac{3.440}{5.280} \text{ milhas} \approx 2{,}65 \text{ milhas no ar}$$

Colocando o Teorema de Pitágoras para funcionar

Outra ótima fórmula para usar ao trabalhar com comprimentos e distâncias é o Teorema de Pitágoras. O *Teorema de Pitágoras* é uma fórmula que mostra a relação especial entre os três lados de um triângulo retângulo. Um ***triângulo retângulo*** (primo do quadrado?) é aquele com um ângulo de 90 graus. Pitágoras notou que se um triângulo era realmente um triângulo retângulo, então o quadrado do maior lado (a ***hipotenusa***) é sempre igual à soma dos quadrados dos dois lados menores.

$$(\text{medida da hipotenusa})^2 = (\text{medida do outro lado})^2 + (\text{medida do lado remanescente})^2$$



Surpreendendo Pitágoras

Pitágoras nasceu em algum lugar da Grécia, em torno de 570 a.C.. Ele é bem conhecido pelo seu teorema, mas ele também é responsável por descobrir uma propriedade musical muito importante: que as notas soadas através de uma corda vibratória dependem do comprimento da corda.

Pitágoras era um grande pensador, mas também demonstrava um comportamento um tanto estranho. Ele fundou uma escola onde mais ou menos 300 jovens aristocratas estudavam matemática, política, filosofia, religião, música e astronomia. Eles formaram uma fraternidade ou sociedade secreta muito rígida onde os membros tinham suas dietas e ações reguladas. A eles não era permitido comer feijão, beber vinho, pegar qualquer coisa que houvesse caído ou atiçar fogo com ferro.. E ao urinar eles ainda tinham que olhar somente para um determinado lugar. Essas crenças estranhas acarretaram na morte de Pitágoras. Quando estava fugindo de sua casa incendiada por protestantes contrários a sua fraternidade, ele se viu cercado por uma plantação de feijões. Por acreditar que não podia pisoteá-los, os perseguidores alcançaram Pitágoras e o mataram.

Por exemplo, um triângulo com lados medindo 3 centímetros, 4 centímetros e 5 centímetros, é um triângulo retângulo. O maior lado é o que mede 5 centímetros, O quadrado de 5 é 25. Os dois lados menores são 3 e 4 centímetros,. $3^2 = 9$ e $4^2 = 16$. A soma de 9 e 16 é 25 – o quadrado do lado maior. Isso funciona somente para triângulos retângulos, e se funcionou o triângulo tem que ser, necessariamente, um triângulo retângulo.



Teorema de Pitágoras: se *a, b,* e *c* são as medidas dos lados de um triângulo retângulo, e c é o maior lado (hipotenusa), então:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Os exemplos a seguir mostram como você pode usar o Teorema de Pitágoras.

- Mostre que um triângulo com lados medindo 5, 12 e 13 é um triângulo retângulo.

  Primeiro encontre o quadrado da medida de cada lado.

  $5^2 = 25,\ 12^2 = 144,\ 13^2 = 169$

  Some os quadrados dos dois lados menores. Essa soma é igual à medida do lado maior: 25 + 144 = 169

- Mostre que um *múltiplo* dos lados medindo 3, 4 e 5 em um triângulo retângulo também é um triângulo retângulo.

  Multiplique 3, 4 e 5 por 8. Os lados são então 24, 32 e 40. Encontre o quadrado das medidas dos lados.

  $24^2 = 576,\ 32^2 = 1024,\ 40^2 = 1600$

  $576 + 1024 = 1600$

  Esse é um múltiplo específico, mas qualquer múltiplo vai funcionar.

- Um carpinteiro quer determinar se uma moldura está com os cantos alinhados ou se está pendendo para um lado. Ele mediu 30 centímetros de um canto ao longo da parte de baixo da entrada e fez uma marca. Depois mediu 40 centímetros acima a partir do mesmo canto e fez uma marca do lado. Então pegou uma fita métrica e mediu a distância ente as marcas. Resultou em 49 centímetros

  Encontre os quadrados das medidas.

  $30^2 = 900,\ 40^2 = 1600,\ 49^2 = 2401$

  $900 + 1600 = 2500 \neq 2401$

  Os dois quadrados menores *não* somam o valor do lado maior.

  Não, não está alinhado.

É claro que em carpintaria as medidas não podem ser sempre tão exatas como a matemática diz que devem ser. Mas existem instruções que os carpinteiros usam para dizer se está igualado o suficiente.

Trabalhando com o perímetro

Qual o comprimento da pista de corrida em torno de um campo? Qual a distância ao redor de um quarto? Quantos centímetros de cercado você precisa para dar a volta em uma piscina? O perímetro é à distância ao redor da parte externa de uma dada área – o comprimento total da periferia que delimita a região.

Em geral, o perímetro de uma figura é a soma das medidas dos lados. Se você tem um triângulo, meça cada um dos três lados e os some. Se você tem uma figura de quatro lados, some as medidas dos quatro lados, e assim por diante. Fórmulas de perímetros são usadas para simplificar esse processo no caso de alguns tipos especiais de figura em que você reconhece que há algo de especial. Você pode usar fórmulas rápidas e fáceis para fazer os cálculos. Muitas dessas fórmulas estão listadas a seguir.



Triangulando triângulos

O perímetro de um triângulo é igual à soma das medidas dos três lados – lados 1, 2 e 3:

$$P = lado_1 + lado_2 + lado_3$$



A fórmula para o perímetro de um triângulo mostra a variável *s* e os subscritos 1, 2 e 3. O "s" representa o lado. Ao invés de usar as letras *a, b* e *c,* é costume usar uma única variável – nesse caso o *s* – e um número de subscritos quando não houver nada especial sobre os lados ou sobre como suas medidas se relacionam umas com as outras. Subscritos são também usados quando há mais de vinte – seis lados em uma figura. Você pode usar o *a* até o *z* para nomear os lados, mas com subscritos você pode usar até onde quiser – a figura pode ter mil lados. Deus me livre!

- Encontre o perímetro de um triângulo com lados de 5metros, 11metros e 13metros.

  $P = 5 + 11 + 13 = 29$metros
- Encontre a quantidade de cercado que você vai precisar para uma área triangular quando você não pode medir o lado maior, a hipotenusa do terreno, porque está muito enlameado, mas sabe que os dois lados que formam um triângulo retângulo são de 7 metros e 24 metros.

  Por ser um triângulo retângulo a soma dos quadrados de 7 e 24 é igual ao quadrado do maior lado.

Determinando o perímetro dos quadrados

Um quadrado é maravilhoso de se trabalhar porque você tem somente uma medida para se preocupar, pois a medida de um lado é igual a de todos os outros.



Os números primos de Erastóstenes

Erastóstenes de Cyrene foi um matemático que viveu durante 275 e 195 a.C. Ele é famoso por seu trabalho com números primos e a ele é dado o crédito de ter sido o primeiro a avaliar de forma exata o diâmetro da terra.

Ele foi, por muitas décadas, o diretor de uma famosa biblioteca na Alexandria. Muito pouco do seu trabalho original sobreviveu. Ele morreu aos 80 anos quando deixou de comer por estar depressivo devido ao fato de ter ficado cego.



O perímetro de um quadrado é 4 vezes a medida de um lado.

$P = 4s$

- Um grupo ambientalista vai fazer uma busca em uma milha quadrada de pradaria para verificar as toxinas nos besouros. Qual o perímetro dessa milha quadrada em *pés*?

  Uma milha é 5.280 pés. Então o perímetro é

  $4 \cdot 5.280 = 21.120$ pés

  Então, se quiserem delimitar a área, vão precisar de muita corda!

Retângulos

Um retângulo é uma figura especial de quatro lados. A primeira forma na Figura 17-1 é um retângulo com quinas de 90 graus, e os lados opostos têm as mesmas medidas.

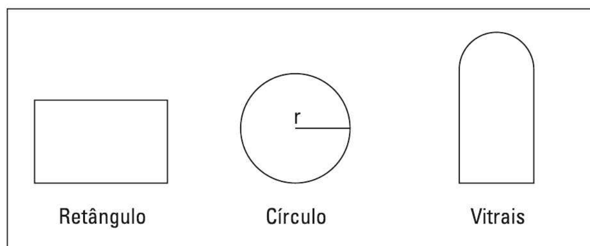


Figura 17-1: Retângulos e círculos e vitrais, aí meu Deus!



Encontre o perímetro de um retângulo somando as medidas dos lados. Outra maneira é dobrar o comprimento, dobrar a largura e somar os dois números juntos. E, ainda, outra maneira é somar o comprimento e a largura juntos e depois multiplicar a soma por dois.

$P = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$

$P = 2l + 2w = 2(l + w)$

Por exemplo, se os lados medem 6 centímetros, 9 centímetros, 6 centímetros, polegadas, você pode apenas somar: 6 + 9 + 6 + 9 = 30. Sem problemas. Mas algumas vezes, quando os números não são tão legais, é mais fácil arrumar esses números em pares. Nos retângulos, cada medida de um lado acontece duas vezes, então apenas encontre os dois lados que têm medidas diferentes – eles estão perto um do outro –, some os dois números diferentes juntos e dobre a soma: 2(6 + 9) = 2(15) = 30. O comprimento é, geralmente, o lado maior e a largura é, usualmente, o menor.

- Seu novo jardim é um retângulo medindo 85 metros de comprimento e 34 metros de largura. Quanto de alambrado você precisará para cercá-la? Qual é o perímetro?

  Some o número 85 com o 35 e dobre.

  2(85 + 35) = 2(120) = 240 metros de cerca

  É claro que isso não inclui um portão – e você deveria considerar isso também, a não ser que goste de pular a cerca.

Circunscrevendo os círculos

Um círculo tem um perímetro e existe um nome especial para ele: circunferência. Pense na palavra: se as circunstâncias (condições ao seu redor) são positivas, você pode circunavegar (navegar ao redor), circundar (andar em volta de) e circunscrever (desenhar ao redor). Para achar a circunferência de um círculo, tudo que você precisa é a medida do raio. O raio é a distância a partir do centro até qualquer ponto do círculo. Se você dobra o raio, você obtém a medida do diâmetro. A segunda forma da Figura 17-1 mostra um círculo com o raio marcado. O diâmetro é o comprimento de um lado do círculo para o outro, atravessando o centro.



A fórmula da circunferência (distância ao redor da parte externa do círculo) é $C = \pi d$, onde d é o diâmetro (distância através do círculo) e π é sempre aproximadamente 3,14.



O símbolo de aproximadamente igual a é escrito como ≈. Então $\pi \approx 3.14$.



π é símbolo para a letra grega pi. Esse símbolo corresponde, tradicionalmente, a relação entre o diâmetro (distância através) e a circunferência (distância ao redor) de um círculo. A relação é a mesma, não importa o tamanho do círculo. A relação é que a circunferência será sempre um pouco mais que três vezes o tamanho do diâmetro. A expressão um pouco mais não pode ser escrita de maneira exata (o valor decimal não tem fim), mas o valor de π é geralmente aproximado, usando 3,14; 3,1416 ou $\frac{22}{7}$. Esses são os valores mais conhecidos. O valor usado depende das circunstâncias. Eu, geralmente, uso 3,14.

- Você quer reescrever a fórmula de maneira a determinar a largura que seu jardim deve ter para que possa comprar uma amarração de cercas e colocar ao seu redor usando toda a cerca da amarração comprada As cercas vêm em amarrações de 50, 100, 150, 200 metros, e assim por diante.

  Achando o valor de d na fórmula $C = \pi d$:

  $\frac{C}{\pi} = \frac{\pi d}{\pi}$ Divida cada lado por π.

  $d = \frac{C}{\pi}$

  O diâmetro é igual a circunferência dividida por π.

  $d = \frac{C}{3{,}14}$

  Se a amarração tem 50 metros de cerca.

  $d = \frac{50}{3.14} \approx 15{,}92$ metros

  Se a amarração tem 100 metros de cerca.

  $d = \frac{100}{3.14} \approx 31{,}85$ metros

  Se a amarração tem 200 metros de cerca.

  $d = \frac{200}{3.14} \approx 63{,}69$ metros

Se você sabe as dimensões do lote que você está ocupando seu jardim, você pode determinar quanto de cerca comprar e não desperdiçar nada.

Olhando os vitrais

Um vitral é um retângulo com um semicírculo em cima – a terceira forma na Figura 17-1. Ele permite mais luz no topo e é muito agradável de olhar. O perímetro do vitral é uma colagem de fórmulas. Esse vitral é apenas um exemplo de como você pode pegar pedaços de figuras e determinar o perímetro somando as medidas dos pedaços.



O perímetro de um vitral é igual à metade da circunferência do círculo cujo diâmetro é igual à largura – ou seja, o comprimento ao longo da base do vitral – mais os comprimentos da parte de baixo e dos lados. $P = \frac{1}{2}\pi b + b + 2h$. A variável b é a largura da base e o diâmetro do semicírculo no topo. O h é o comprimento dos lados.

- Encontre o perímetro do vitral que tem lados de 3 metros e uma base (ou largura) de 4 pés. Você precisa dessa medida para comprar produtos de vedação para fechar a passagem de ar.

  $P = \frac{1}{2}\pi b + b + 2h = \frac{1}{2}(\pi \cdot 4) + 4 + 2(3)$

  $= 2\pi + 4 + 6 = 2\pi + 10 \approx 16{,}28$ metros

Você talvez tenha que fazer mais cálculos na loja de ferragens, se o tubo de vedante diz que cobre 10 metros.

Indo mais além: fórmulas de áreas

Área é uma medida de quantas unidades bi-dimensionais (unidade de medida ao quadrado) um dado objeto ou superfície cobre – quanto espaço plano ele ocupa. Geralmente, a área é dada em polegadas quadradas, centímetros quadrados, pés quadrados, milhas quadradas, e assim sucessivamente.

Imagine um piso coberto por placas de pedra quadradas. Se cada pedra tem 1 metro por 1 metro, contar o número de pedras diz o tamanho da área em metros quadrados. No mundo real, a maioria dos pisos não é coberto por pedras que têm, por conveniência, 1 metro ao quadrado de medida. A maioria dos pisos tem pedaços de pedras recortadas nas bordas e nas quinas e está ao redor de coisas com formas estranhas. Então as fórmulas de áreas, como as desse tópico, ajudam você a fazer o cálculo.

Na seção anterior, as fórmulas de perímetro são expressas em medidas lineares. Medida linear tem apenas uma dimensão. É de um lugar para outro. Não há como alargar a questão. Você mede com uma régua, com uma trena ou uma fita métrica. Medidas quadráticas são usadas para medir áreas. Elas têm duas medidas – uma ao longo de um lado e uma segunda, perpendicular (90 graus) àquele lado.

Desenhando retângulos e quadrados

Retângulos e quadrados têm basicamente a mesma fórmula da área, pois ambos têm ângulos retos e as mesmas medidas em lados opostos. O procedimento geral é multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura. O produto dos dois lados será a área.

Encontrando a área do retângulo

A maioria dos quartos em casas e escritórios possui um formato retangular. Escrivaninhas, mesas e tapetes também são, geralmente, retangulares. Isso torna mais fácil a arrumação de moveis e objetos.



A área do retângulo é a base vezes a altura:

$$A = b \cdot h$$

A área do retângulo de 10 pés de comprimento e 6 pés de largura é $10 \cdot 6 = 60$ pés quadrados.

- Um terreno de 850 metros de comprimento e 350 metros de largura precisa de fertilizante. Se um saco de fertilizante cobre 1 hectare, de quanto de fertilizante você precisaria para cobrir o jardim inteiro?

  Note que as medidas são diferentes. O jardim é medido em metros e a cobertura do fertilizante está em hectares. Determine o tamanho do terreno em metros quadrados e depois converta a cobertura do fertilizante em metros quadrados por saco.

  $$A = b \cdot h = 850 \cdot 350 = 297.500 \text{ metros quadrados}$$

Agora, quantos metros quadrados há em um hectare? O prefixo hect- relaciona-se ao multiplicador 100 (1 hectômetro vale 100 metros). Como estamos lidando com medidas de áreas, 1 hectare é uma área de 100 metros por 100 metros. Existem 10.000 metros quadrados em um hectare. Um saco de fertilizante cobre 1 hectare, então 10.000 metros quadrados por saco.

Divida 297.500 metros quadrados por 10.000 metros quadrados.

$\frac{297.500}{54} = 55\frac{5}{54}$ sacos de fertilizante

Você pode comprar 30 sacos de fertilizante e ter um pouco de sobra ou pode comprar 29 sacos e colocar um pouco menos em algumas partes do terreno.



Preenchendo um quadrado

A área do quadrado é a medida do seu lado ao quadrado, então a fórmula é:

$A = l^2$

A área do quadrado é fácil de encontrar, ela é um quadrado perfeito. Será que isso pode ficar ainda melhor? Um quadrado que tenha 8 centímetros em um lado tem uma área de $8^2 = 64$ centímetros. Um quadrado de $\frac{1}{2}$ metro de comprimento em um lado tem uma área de $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ metro quadrado.



Você pode usar a fórmula para a área do retângulo, $A = l \cdot l$. No entanto, devido ao fato de, no quadrado, o comprimento e a largura possuírem a mesma medida, as variáveis serão as mesmas. Então, é mais fácil dizer $A = l^2$.

Sintonizando os triângulos

Encontrar a área do triângulo pode ser um pequeno desafio. Basicamente, a área de um triângulo é a metade da área de um retângulo imaginário do qual o triângulo faz parte. No entanto, nem sempre é necessário ou mesmo fácil encontrar o comprimento e a largura desse retângulo hipotético – você só precisa de uma ou duas medidas do triângulo.

A fórmula tradicional para achar a área do triângulo envolve o comprimento da *base* (a parte de baixo), e a *altura* (a distância perpendicular da base). Encontrar a área do triângulo é fácil quando você utiliza a regra para encontrar a altura, mas isso nem sempre é prático. Então, você tem outra opção, o teorema de Heron – explicado mais adiante nesse mesmo tópico.



Seguindo na direção tradicional

A área do triângulo é igual a metade do produto da medida da base vezes a altura do triângulo. $A = \frac{1}{2}bh$

A base é o comprimento da parte de baixo para onde a altura é desenhada. A altura é a medida a partir do ângulo de cima descendo perpendicularmente até a base. Ela forma um ângulo reto (90 graus) com a base. $A = \frac{1}{2}b \cdot h$

Você pode usar essa regra quando for possível fazer essas medições – quando você puder desenhar a altura perpendicular a base e medir os dois.

- Encontre a área do triângulo de 20 centímetros de comprimento com uma altura de 13 centímetros.

  $A = \frac{1}{2}(20)(13) = \frac{1}{2}(260) = 130$ centímetros quadrados

- Encontre a área de um triângulo retângulo que tem lados de 5 metros, 12 metros, 13 metros.

  Um triângulo retângulo tem dois lados perpendiculares um ao outro (os dois lados menores). Então você pode usar um lado como base e o outro lado como a altura. O lado maior em um triângulo retângulo é a hipotenusa, e nunca é parte do ângulo reto. Então as duas medidas que você quer são a de 5 metros e a de 12 metros.

  $A = \frac{1}{2}(5)(12) = \frac{1}{2}(60) = 30$ pés quadrados

Decolando com o teorema de Heron



A área de um triângulo é igual a raiz quadrada do produto de quatro valores: o semiperímetro (metade do perímetro), o semiperímetro menos o primeiro lado, o semiperímetro menos o segundo lado e o semiperímetro menos o terceiro lado. Faça s representar o semiperímetro e a, b e c representarem as medidas dos lados.

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Quando você está tentando encontrar a área de um triângulo grande – vamos dizer, de um parque, por exemplo – ou se você não pode medir nenhum ângulo para desenhar a linha perpendicular a um dos lados, então você pode encontrar a área simplesmente medindo os três lados e usando o teorema de Heron:

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Para usar essa fórmula, você precisa das medidas dos três lados, a, b, c e a comprimento do semiperímetro, s. O semiperímetro é metade do perímetro. E, lembre-se, o perímetro é a distância em volta do triângulo – a soma da medida dos três lados.

- Encontre a área de um triângulo com lados de 7 centímetros, 24 centímetros e 25 centímetros.

  Faça $a = 7, b = 24, c = 25$. O perímetro é $P = 7 + 24 + 25$ centímetros, então o semiperímetro, $s = \frac{56}{2} = 28$.

  $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{28(28-7)(28-24)(28-25)} =$

  $\sqrt{28(21)(4)(3)} = \sqrt{7056} = 84$ centímetros quadrados

- Encontre a área de um triângulo com lados de 2, 3 e 4 metros.

  Nem todas as respostas serão iguais a do exemplo anterior. Eu peguei propositalmente um triângulo retângulo para que você tenha uma reposta na forma de um número inteiro. Esse exemplo é mais típico.

Se os lados são 2,3 e 4, então a = 2, b = 3, c = 4 e $s = \frac{1}{2}(2 + 3 + 4) = 4{,}5$. Então

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{4.5(4.5-2)(4.5-3)(4.5-4)} =$$
$$\sqrt{4.5(2.5)(1.5)(.5)} = \sqrt{8.4375} \approx 2.905 \text{ metros quadrados}$$

Andando em círculos



A área de um círculo está relacionada ao raio do círculo e ao valor de pi.

A fórmula para a área de um círculo é pi (aproximadamente 3,14) vezes o raio ao quadrado:

$$A = \pi \cdot r^2$$

- Encontre a área de um disco circular que tem 50 metros de um lado para o outro do círculo.

  Primeiro você precisa descobrir o raio. Se o círculo tem 50 metros de um lado para o outro, então essa é a medida do diâmetro. Desta forma, o raio é metade disso ou 25 metros.

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 25^2 = (3.14) \cdot 625 = 1{,}962.5 \text{ metros quadrados}$$



Porque há 360 graus em um círculo (e não 100 ou 1.000)?

A medida usada para ângulos, o grau, é uma unidade absolutamente inventada. Ela não ocorreu naturalmente como outras relações como, por exemplo, o pi. Qualquer coisa podia ter sido usada: qualquer tamanho e qualquer nome.

Parece que o grau teve sua origem na antiga Babilônia e é derivado de seu sistema numérico de base 60 (base 60 é aquela que tem sessenta dígitos diferentes, ao contrário dos nossos dez – imagina como aprender esse aí?). O sistema de base 60 também influenciou o mundo: horas e minutos são divididos em 60, assim como há 60 minutos em um grau (é assim que os graus são subdivididos).

E, realmente, 360 é o número total de graus para se usar. Ele divide o círculo em mais partes iguais do que seria possível se houvesse 100 ou 1.000 graus. O número 360 é dividido sem deixar resto por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120 e 180 – e ser divisível por 3 realmente faz a diferença! Já o número 100 é dividido somente por 2, 4, 5, 10, 20, 25 e 50.

Se animando com as fórmulas de volume

A área é uma figura ou representação bi-dimensional. É uma região plana. O volume é tri-dimensional. Ao contrário do seu último namorado ou namorada, ele tem profundidade. Para achar o volume, você mede de um lado para o outro, de frente para trás e de cima para baixo.

Com o volume você pode contar quantos cubos (imagine cubos de açúcar) você pode encaixar em um objeto. Esses cubos podem ser de uma polegada em cada canto, um centímetro em cada canto, um pé em cada canto, ou o tamanho que precisarem ser. E, continuando com o tema do cubo, você mede o volume em polegadas cúbicas, pés cúbicos, centímetros cúbicos, ou qualquer coisa cúbica.

Bisbilhotando os prismas e os cubos

O volume de um prisma (mais conhecido como um cubo), é um dos mais simples de se achar no mundo dos problemas de volume. A parte de cima e de baixo de um prisma tem exatamente as mesmas medidas. A distância do topo para a base é a mesma, independente de onde você meça, desde que você mantenha essa distância perpendicular para ambos, o topo e a base.

A fórmula para encontrar o volume ($V = c \cdot l \cdot h$), significa que o volume é igual ao produto do comprimento (c) vezes a largura (l), vezes a altura (h)

- Encontre o volume de um cubo que tem 4 pés de comprimento, 3 pés de largura e 9 pés de altura.

  $V = c \cdot l \cdot h = 4 \cdot 3 \cdot 9 = 108$ pés cúbicos

- Se você está comprando uma geladeira de 360 litros, quais são as dimensões dela? 360 litros é o mesmo que 360 decímetros cúbicos. Sendo 1 decímetro igual a 10 centímetros.

  Existe um número infinito de maneiras para multiplicar três números juntos e conseguir 360. Veja alguns números inteiros e frações e tente imaginar como seria a geladeira com essas dimensões.

  - $360 = 3 \cdot 4 \cdot 30$ (Convertendo decímetros para centímetros, temos: 30 centímetros de comprimento, 40 centímetros de largura e 3 metros de altura!)
  - $360 = 12 \cdot 3 \cdot 10$ (1,20 metros de comprimento, 30 centímetros de largura e 1,00 metro de altura)
  - $360 = 6 \cdot 6 \cdot 10$ (60 centímetros de comprimento, 60 centímetros de largura, 1 metro de altura)
  - $360 = 3 \cdot 6 \cdot 20$ (30 centímetros de comprimento, 60 centímetros de largura, 2 metros de altura)
  - $360 = 4 \cdot 5 \cdot 18$ (40 centímetros de comprimento, 50 centímetros de largura, 1,80 metro de altura)

  Qual geladeira você gostaria de ter? Qual é a sua altura? Até onde você alcança na parte de trás?

Cilindros cíclicos

Os cilindros eram a forma favorita do meu irmão quando ele estava na marinha em um porta-aviões no meio do oceano. Sendo a irmã maravilhosa que sou, eu enviava para ele biscoitos de chocolate que cabiam direitinho em uma caneca de café de 3 libras. Imagine a pilha de biscoitos chegando para você toda semana! Ele sempre foi muito querido nesse navio!



A fórmula para o volume do cilindro é $V = \pi r^2 h$. O volume é igual a pi vezes o raio ao quadrado vezes a altura.

Um cilindro é uma figura sólida com um círculo na base. Uma lata de atum, um tanque de estocagem de óleo, uma lata de ervilhas, um rolo de papel higiênico e, é claro, uma caneca de café são todos exemplos de cilindros. A parte de cima e a base são círculos e a altura do cilindro é a distância entre os círculos.

A fórmula para encontrar o volume de um cilindro é muito parecida com a do prisma: você multiplica a área da base vezes a altura.

- **Prisma:** $V = c \cdot l \cdot h$

  A fórmula para achar a área da base é $c \cdot l$, a altura é h.
- **Cilindro:** $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

  A fórmula para achar a área da base é $\pi \cdot r^2$; a altura é h.

Para achar o volume de um cilindro você precisa do raio de cima e de baixo, e você precisa, também, da altura.

Essa fórmula diz a você quantos cubos podem caber em um cilindro. Mas como colocar cubos em um buraco redondo? Bem, basta cortar uns cantinhos.

O volume de um cilindro é, geralmente, dado em termos das medidas de líquidos como, por exemplo, litros e mililitros. Mas também pode ser dado em termos de cubos: um litro equivale a 1 decímetro cúbico, ou 1.000 centímetros cúbicos. O volume seria quantos cubos cabem dentro da figura. Eu vou dar um exemplo em decímetros cúbicos, dez centímetros de cada lado, nesse caso.

- Você quer descobrir a profundidade que sua piscina precisará ter para que possa ter um raio de 3 metros e com capacidade para tantos litros de água.

  Achando o valor da altura, h, na fórmula:

  $$V = \pi r^2 h$$

  Divida cada lado por πr^2

  $$\frac{V}{\pi r^2} = \frac{\cancel{\pi r^2} h}{\cancel{\pi r^2}}$$

$$\frac{V}{\pi r^2} = h$$

A altura é igual ao volume dividido pelo produto de π e o raio ao quadrado.

Substituindo *r* por 3 metros, que é igual a 30 decímetros

$$h = \frac{V}{100\pi}$$

Se sua piscina vai conter 3.600 decímetros cúbicos de água, que são iguais a 3.600 litros, então

$h = \frac{400}{100\pi} = \frac{4}{\pi} \approx \frac{4}{3.14} \approx$ 1.27 decímetros = 12,7 centímetros de profundidade. Dá pra molhar as canelas!

Se sua piscina vai conter 18.000 litros de água, então:

$h = \frac{800}{100\pi} = \frac{8}{\pi} \approx \frac{8}{3.14} \approx$ 2.55 decímetros = 63,7 centímetros de profundidade.

Se sua piscina vai conter 45.000 litros de água, então:

$h = \frac{1000}{100\pi} = \frac{10}{\pi} \approx \frac{10}{3.14} \approx$ 3.18 decímetros = 1 metro e 59,2 centímetros de profundidade.

Se sua piscina vai conter 63.000 litros de água, então:

$h = \frac{2000}{100\pi} = \frac{20}{\pi} \approx \frac{20}{3.14} \approx$ 6.37 decímetros = 2 metros e 22,9 centímetros de profundidade. Cuidado para não se afogar!

Vai precisar de muita água para encher essa piscina.

Escalando a pirâmide

Uma pirâmide é algo muito fácil de descrever porque todo mundo tem em mente sua aparência. Tecnicamente, uma *pirâmide* é um objeto com uma base (parte de baixo) e triângulos saindo de cada lado da base para se encontrarem em um ponto.

As pirâmides do Egito têm um quadrado como base e triângulos de lados iguais nos lados – pelo menos era assim no início. O vento e a areia têm corroído os topos e pode ser que as pirâmides egípcias não tenham mais um ponto em comum. Mas, a base de uma pirâmide pode ser um triângulo eqüilátero (todos os lados tem as mesmas medidas), um quadrado, um pentágono regular (cinco lados, todos com a mesma medida), e assim por diante. Os exemplos nesse capítulo, no entanto, se restringem a bases quadradas.



O volume de uma pirâmide é um terço da área da base multiplicado pela altura:

$$V = \frac{1}{3}\text{ (área da base)} \cdot h$$

O volume de uma pirâmide não é muito difícil de determinar. Então, é importante conhecer as fórmulas para achar a área. Dê uma olhada em "Indo mais além: fórmulas de áreas" no começo do capítulo para uma revisão, embora as fórmulas de áreas para quadrados e triângulos estejam incluídas nas seguintes fórmulas:

- **Base quadrada:** $V = \frac{1}{3} s^2 \cdot h$
- **Base no formato de um triângulo eqüilátero:** $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3} s^2 h}{4} = \frac{\sqrt{3} s^2 h}{12}$

Esse primeiro exemplo é mais ou menos um desafio histórico:

- Encontre o volume original da Grande Pirâmide. Ela tinha *originalmente* uma base quadrada com cada lado medindo 236 metros e uma altura de 146 metros

  $V = \frac{1}{3} s^2 \cdot h = \frac{1}{3} (756)^2 \cdot 480 = 91{,}445{,}760$ metros cúbicos

  Talvez você possa encontrar mais facilmente o volume de uma pirâmide na forma de tenda cujos lados quadrados são de 6 metros de comprimento e cuja altura é de 10 metros.

  $V = \frac{1}{3} s^2 \cdot h = \frac{1}{3} (6)^2 \cdot 10 = 120$ metros cúbicos

  Isso é muito grande! Um metro cúbico é igual a 1.000 litros, então haveria aí
  120.000 litros!

Apontando para os cones



A fórmula para o volume de um cone é um terço vezes pi vezes o raio ao quadrado vezes a altura.

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

A fórmula para achar o volume de um cone deveria ser familiar por duas razões. Primeiro, ela tem $\frac{1}{3}$, da mesma forma que a fórmula da pirâmide. A outra parte familiar é o $\pi r^2 h$, que é a fórmula para achar o volume de um cilindro. Você pode pensar em um cone como se fosse somente um cilindro que foi cortado. O cone de sorvete é uma forma clássica do cone, assim como os cones usados no trânsito.

Os dois exemplos abaixo devem ser situações que você é capaz de reconhecer por experiência pessoal.

- Qual é o volume de uma tenda em forma de cone que tem um diâmetro de 18 pés e uma altura de 20 pés?

  diâmetro de 6 metros e uma altura de 5 metros? Se o diâmetro é de 6 metros, então o raio é de 3 metros.

  $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi(9)^2 \cdot 20 = 540\pi \approx 1{,}696$ metros cúbicos

- Quanto sorvete você pode colocar em um cone de açúcar que tem 8 centímetros de diâmetro e 15 centímetros de altura? (Não contamos o sorvete que você pode colocar no topo do cone cheio. Isso vem depois.)

  $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi(1.5)^2 \cdot 6 = 4.5\pi \approx 14$ centímetros cúbicos, ou 251 ml de sorvete no cone.



Rolando junto com as esferas

A fórmula para determinar o volume de uma esfera é quatro terços vezes pi vezes o raio ao cubo:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

Uma esfera é uma forma familiar. Bolas de basquete e de beisebol, bolas de gude e globos são esferas. Como você pode ver a partir da fórmula, você precisa de apenas uma coisa para encontrar o volume de uma esfera: o raio, que é à distância do centro da esfera até a parte externa.

Encontrar o volume de uma esfera pode ser útil quando você estiver comprando um tanque de gás hélio ou um contêiner de sorvete.

- Qual é o volume de uma bola que tem um diâmetro de 36 centímetros?

  Um diâmetro de 36 centímetros significa que o raio da bola é de 18 centímetros.

  $$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 = 972\pi \approx 3{,}052 \text{ centímetros cúbicos}$$

  De volta ao cone de sorvete. Se a abertura do cone é de 8 centímetros, então certamente você pode encaixar uma esfera (bola) de sorvete que tenha um diâmetro de 9 centímetros. Está tudo bem se for maior – desde que você lamba rápido.

- Qual é o volume de uma esfera com diâmetro de 9 centímetros?

  $$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = 10\frac{2}{3}\pi \approx 33.5 \text{ centímetros cúbicos}$$

Completando o percurso com fórmulas para distância

Você está por alguns dias em um vagaroso barco rumo a China e gostaria de saber a que distância se encontra. Ou você quer descobrir quanto tempo levará para dirigir até a casa da sua avó para jantar. Ou talvez você quisesse saber a velocidade de um trem expresso que te leva de Belém do Pará para a cidade de São Paulo, em 18 horas. A fórmula da distância igual à velocidade multiplicada pelo tempo pode te ajudar a achar as respostas para todas essas perguntas.



Descobrindo a distância e a velocidade

A fórmula $d = v \cdot t$ significa que a distância viajada é igual à velocidade vezes o tempo.

Para transformar a fórmula em uma em que você possa usar para achar o tempo que levaria para chegar a algum lugar (por exemplo, para a casa da sua

avó), você acha o tempo, t, dividindo cada lado da equação por v, a velocidade. Agora a fórmula diz que o tempo que se leva para fazer a viagem é igual à distância total dividida pela velocidade.

Você pode juntar a distância até a casa da sua avó e a velocidade em que você pretende viajar para encontrar o tempo que você levará para chegar lá.

É hora da decisão. Qual o limite de velocidade? Como está o trânsito?

De forma semelhante, se você quer saber a velocidade de um trem expresso nos 2.400 quilômetros de Belém até São Paulo durante 18 horas, você escreve a fórmula em função da velocidade, dividindo cada lado da equação por t, ou tempo.

Agora você pode dividir a distância (número de milhas) pelo tempo (18 horas) para encontrar a velocidade. Esse é um trem muito rápido! (Mesmo que seja apenas na minha imaginação).

A fórmula permite que você determine a distância viajada, o tempo que levará para percorrer certa distância ou a velocidade da viagem. O único cuidado é com a parte da velocidade. Se você diz que dirigiu 480 quilômetros em 6 horas, você poderia usar a fórmula e dizer que $300 = v \cdot 6$, $v = 50$, ou que a velocidade que você viajou foi de 80 quilômetros por hora. No entanto, na vida real, você sabe que não dirigiu a 50 milhas por hora o tempo todo. Houve um começo em 0 milhas por hora e a diminuição da velocidade para parar. E, com certeza, você parou durante o percurso para refeições! Na realidade, a velocidade calculada é uma velocidade média.

Os problemas a seguir usam a fórmula da distância, mas são resolvidos em função da velocidade e do tempo – e não da distância –, apenas para mostrar quão versátil uma pequena fórmula pode ser.

- Qual é a velocidade de um avião que pode voar 2.000 quilômetros em 2 horas e meia?

  $$d = v \cdot t$$
  $$2{,}000 = v \cdot 4.8$$
  $$v = \frac{2{,}000}{4.8} = 416\,\frac{2}{3} \text{ quilômetros por hora}$$

- Quanto tempo levavam os tropeiros para viajar de Laguna em Santa Catarina até São Paulo, se eles viajavam a uma velocidade de 30 quilômetros por dia? A distância entre as duas cidades é mais ou menos 780 quilômetros.

  $$d = v \cdot t$$
  $$1{,}980 = 12 \cdot t$$
  $$t = \frac{1{,}980}{12} = 165 \text{ dias}$$

  É quase um mês. Hoje em dia, você faz a viagem de carro em pouco mais de 11 horas. Faça uma paradas de descanso!

Navegando em alto-mar

Você está assistindo um filme antigo de John Wayne, com o Duque fazendo o papel de um capitão de navio (não me diga que você não sabe quem é John Wayne. Ele venceu a guerra – muitas delas, muitas vezes). De qualquer maneira, no filme, o barco pode ir a somente alguns nós (Você já pensou o que um nó está fazendo nesse filme?)

Milhas são medidas de forma diferente na água e na terra. Existem duas relações que você pode usar como fórmulas.

1 milha náutica = 1,51 milhas terrestres = 2,43 quilômetros

1 nó = 1,152 milhas por hora = 1,852 quilômetros por hora



A primeira relação é somente uma medida transformada em outra. Uma milha *terrestre* é a milha tradicionalmente conhecida – a que tem 1,609 quilômetros.. A palavra *terrestre* é usada apenas quando a milha está sendo comparada a outro tipo de milha como, por exemplo, a milha náutica.

Depois de olhar os exemplos a seguir, talvez você entenda o que eles falam quando usam a linguagem náutica na próxima vez que assistir um filme sobre navegação.

- Qual foi a distância que um pássaro voou se ele cobriu uma distância de 16 milhas náuticas?

$$\frac{1 \text{ milha náutica}}{16 \text{ milhas náutica}} = \frac{1.51 \text{ quilômetros}}{x \text{ quilômetros}}$$

$$x \text{ milhas terrestres} = 16 \cdot 1.51 = 24.16 \text{ quilômetros}$$

- Qual a distância do barco de John Wayne se ele viaja a uma velocidade de 14 nós?

$$\frac{1 \text{ nó}}{14 \text{ nó}} = \frac{1.152 \text{ quilômetros por hora}}{x \text{ quilômetros por hora}}$$

$$x \text{ quilômetros por hora} = 14 \cdot (1.152) = 16.128 \text{ quilômetros por hora}$$

(Talvez você se lembre somente que a velocidade em quilômetros por hora é "um pouco menos do que" o dobro da velocidade em nós). Para mais informações sobre problemas envolvendo distância, veja o Capítulo 18.

Calculando juros e porcentagem

Porcentagem é parte do nosso vocabulário moderno.Você provavelmente diz ou ouve essa expressão todo dia.

- O preço do feijão subiu 30% no ano
- O índice BOVESPA teve queda de 3,2%
- O aproveitamento do seu time é 70% dos pontos disputados
- A taxa de desemprego caiu para 5,5%



Por cento é usado para expressar frações como frações equivalentes com um denominador igual a 100. O "por cento" é o que indica o numerador da fração, ou seja, quantos pedaços de 100.

- $80\% = \frac{80}{100} = 0.80$
- $16\frac{1}{2}\% = \frac{16.5}{100} = 0.165$
- $2\% = \frac{2}{100} = 0.02$

Você usa por centos e porcentagens nas fórmulas a seguir.Transforme as porcentagens em decimais para que seja mais fácil de multiplicar e dividir. Para fazer essa transformação, você move o ponto decimal no por cento em duas casas para a esquerda. Se nenhum ponto decimal estiver sendo mostrado, devemos supor que ele está à direita do número.

Fórmulas de juros compostos

Descobrir o quanto de juros você tem que pagar, ou quanto você está ganhando, é simples com as fórmulas nesse tópico.

Calculando juros simples

Juros simples são usados para determinar a quantidade de dinheiro adquirida em juros que não são compostos. É também usado para calcular a quantia total a pagar ao comprar alguma coisa a prazo. Os juros simples são, basicamente, uma porcentagem do valor total. É aplicado somente no valor inicial – e não sobre os valores variáveis que crescem com o investimento. Para tirar vantagem do crescimento de uma conta, use os juros compostos.



O montante de juros simples (*L*)(*i* de *interest*, que é juros em inglês) acumulado é igual ao valor do capital inicial (*p*) (também chamado de principal) vezes a taxa unitária (*j*) vezes o tempo (*t*) envolvido.

A fórmula para calcular os juros simples é:

$$J = C \,.\, i \,.\, t$$

- Qual é o valor dos juros simples em $10.000 quando a taxa é de 15% e o tempo é de 3 anos e meio?

  $$J = C \,.\, i \,.\, t$$

  $$J = 10{,}000 \cdot (0.025) \cdot 3.5 = 875$$

  Os juros são de $5.250

- Você vai comprar uma televisão "a prazo". A loja de eletrodomésticos vai cobrar 12% de taxa. Você soma isso ao preço da televisão e paga o valor total em "24 suaves prestações mensais". Vinte e quatro meses = 2 anos, então t = 2. A televisão custa $600. Qual será o valor das suas "suaves prestações"?

  $$J = 600 \cdot (0.12) \cdot 2 = 144$$

  Os juros são de $144. Some isso ao valor da televisão e o total será de $744. Divida por 24 e, então, os pagamentos serão de $\frac{744}{24} = 31$; Isso significa $31 por pagamento. Parece um bom negócio!

Calculando os juros compostos

Juros compostos são usados para determinar o quanto você tem em sua poupança depois de um determinado tempo. *Juro composto* é chamado de composto porque o juro acumulado é somado ao principal para o cálculo do novo juro. A forma de cálculo do juro sobre juros depende de cada contrato. As poupanças, por exemplo, são operações que rendem mensalmente, há outras que são anuais.

Ao deixar o juro obtido retido em sua conta, você está, na prática, ganhando mais dinheiro porque o juro é calculado na nova soma.

A fórmula para juros compostos é:

$$Sn = P\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

O montante (M) na conta é igual ao valor principal (P, valor inicial) multiplicado pela soma de 1 e a taxa de juros, tudo elevado ao tempo. É importante que a taxa de juros e o tempo estejam na mesma medida, ou seja, juros ao mês, tempo em meses; ou juros ao ano, tempo em anos.

- Quanto há em uma conta que começou com $5.000 e que, durante 14 anos, esteve rendendo a uma taxa de 6% ao trimestre?

  O *principal* é $5.000; a *taxa* é de 6%, ou 0,06, o tempo em anos é 14, o que equivale a 56 trimestres.

  $$Sn = 5{,}000\left(1 + \frac{.06}{4}\right)^{4 \cdot 14}$$

A taxa de juros e o prazo da operação estão expressos na mesma base de tempo, em trimestres. Cuidado para não misturar meses com trimestres, nem com anos.

$$Sn = 5{,}000(1.015)^{56}$$

Através da ordem das operações, eleve primeiro a potência.

$$Sn = 5{,}000(2.30196) = 11{,}509.82$$

A quantia de dinheiro mais que dobrou. Compare isso à mesma quantidade de dinheiro aplicado a juros simples. Usando a fórmula de juros simples, $J = C\,.\,i\,.\;t = 5{,}000(0.06)(14) = \$4{,}200$. Some esse juro ao valor original de $5.000 e o total será de $9.200. Isso é mais que $2.000 e menos que o valor adquirido usando os juros compostos.

Veja um exemplo muito mais dramático do poder dos juros compostos:

- Suponha que você recebeu uma carta do Banco do Brasil. Eles dizem que lgum ancestral seu veio com Dom João em 1808,, depositou um dólar no banco e depois se perdeu no mar no caminho de volta para casa. O seu dólar ficou no banco, rendendo a uma taxa de juros compostos de 0,5% ao mês. Isto está se tornando uma conta incômoda porque as tarifas precisam ser cobradas; eles querem debitar da conta a tarifa atual de $25 por mês – retroativamente. Você quer reivindicar essa conta?

  A princípio, você talvez diga, "De jeito nenhum! Eu ia dever dinheiro". Depois você pegaria a sua calculadora de confiança e faria os cálculos. Se o seu ancestral veio com a família imperial em 1808, e se você recebeu a carta em 2008, o que exatamente você está procurando?

  O valor principal é $1, a taxa de juros é de 0,5% ao mês. Esse dinheiro ficou depositado por 200 anos, mas isso significa 200 anos de $25 de despesas mensais.

  $$Sn = 1\left(1 + \frac{.035}{4}\right)^{4 \cdot 510} = 1(1.00875)^{2{,}040} = 52{,}292{,}254.90$$

  Isso é o valor de um bom apartamento, a partir de um depósito inicial de $1

  Subtraindo as despesas: 25·12·200 = 60.000; mesmo pagando $60.000 ainda sobra

Calculando impostos e descontos

Você pode calcular tanto o imposto cobrado em um item que você está comprando, quanto o desconto de itens em liquidação com porcentagens.

- **Preço total** = valor do item × (1 + imposto percentual na forma de decimal)
- **Preço descontado** = custo original × (1 – percentual descontado na forma de decimal)
- **Preço original** = preço descontado ÷ (1- preço descontando na forma de decimal)



Probabilidade e aniversários

Um acontecimento muito interessante pode ser previsto através da probabilidade. Se você está em uma sala com 24 pessoas, há mais do que 50% de chance de que duas das pessoas na sala tenham a mesma data de aniversário – mesmo mês e dia. Aumente o número de pessoas na sala e as chances serão ainda maiores. Apenas pense nisso: 365 ou 366 aniversários dentre os quais escolher e só precisamos de 24 pessoas para a aposta de que duas delas têm a mesma data de aniversário.

O ramo matemático da probabilidade nasceu de uma pergunta de aposta. Um amigo do matemático Blaise Pascal (Francês do século 17), era um apostador profissional e escreveu para Pascal perguntando por que certa combinação do dado acontecia com mais freqüência que outras; ele também queria saber como dividir uma grande quantia de dinheiro de um jogo de dados interrompido. Então, Pascal e o matemático Pierre de Fermat escreveram e trocaram algumas cartas sobre o assunto e, subseqüentemente, descobriram a teoria da probabilidade.

Todos os consumidores se deparam com impostos nas compras e torcem para encontrar situações onde possam comprar coisas em promoção. Vale a pena ser um consumidor sensato. Veja esses exemplos.

- O carro de $24.000 que você quer está com desconto de 8%. Quanto ele custará agora com o desconto? Lembre-se de adicionar o 5% do imposto sobre a venda.

  Preço descontado = 24.000 × (1 – 0,08) = 24.000 × 0,92 = $22.080

  Preço total = valor do item × (1 + imposto percentual na forma de decimal)

  Preço total = 22.080 × (1 + 0,05) = $23.184

- Os sapatos que você está olhando estão com desconto de 40% e a desse preço foram descontados mais 15%. Qual era o preço original, se você pode comprá-los agora por $68?

  Se ao preço atual foi descontado 15%, encontre o valor que teve o primeiro desconto (o primeiro preço descontado).

  $$\text{Preço original} = \frac{\text{preço descontado}}{1 - \text{desconto percentual na forma de decimal}}$$

  $$\text{“Primeiro preço descontado”} = \frac{68}{(1 - 0.15)} = \frac{68}{.85} = \$80$$

  $$\text{Preço original} = \frac{80}{(1 - 0.40)} = \frac{80}{.60} = \$133.33$$

  O desconto de 40% seguido pelo desconto de 15% não é o mesmo que um desconto de 55%. Um desconto de 55% teria resultado em sapatos de $60.

Resolvendo combinações e permutações

Combinações e permutações são métodos e fórmulas para contar coisas.Você talvez pense que você aquele"negócio de contar"já dominado,mas você quer realmente contar o número das coisas a seguir?

- Quantas possibilidades diferentes de roteiros para as férias você pode ter caso planeje ir a três estados diferentes na sua próxima viagem?
- De quantas maneiras diferentes você pode rearrumar as letras da palavra *esperto* – e quantas delas formam outras palavras?
- De quantas maneiras diferentes você pode escolher 6 números dentre 60 e apostar $1,50 em cada maneira para tentar ganhar na loteria?

Você pode começar a fazer listas das maneiras diferentes de resolver os problemas anteriores,mas você logo se cansaria e talvez ficasse um pouco entediado.A álgebra vem ao seu auxílio com algumas fórmulas para resolver combinações e permutações.

Contagem regressiva: Fatorial

A operação principal para resolver combinações e permutações é a operação *fatorial.* Esta é,verdadeiramente,uma operação perfeita.Só precisamos de um número para fazê-la.O símbolo que te diz para fazer a operação é um sinal de exclamação:"!".Quando eu escrevo"6!",eu não quero dizer,"Seis,uau!".Bem,eu suponho que até possa dizer isso se meu cachorro tivesse seis filhotes,mas no contexto matemático,o sinal de exclamação tem um significado específico.

$6! = 6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 720$

$4! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 24$

$7! = 7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 5.040$



O *fatorial* de qualquer número inteiro é o número que você obtém multiplicando o número inteiro por todo número contável menor que ele mesmo.Lembrem-se,os números contáveis são 1,2,3,4,e assim por diante.

$n! = n \cdot (n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots$

O fatorial funciona quando n é um número inteiro;isso significa que você pode usar números como 0,1,2,3,4,etc.Embora uma surpresa seja o valor do 0!. Tente em uma calculadora,você verá que 0! = 1.



Googol

Um googol é um número muito grande. Na verdade ele foi nomeado de googol ao pedirem a uma criança de nove anos para criar um nome para um número muito grande. O googol é o número 1 seguindo por 100 zeros, é 10^{100} . É suposto que esse número seja maior do que o número de elétrons em todo o universo. Um googol é um pouco maior do que 69! (Isto é um 69 fatorial e não uma expressão de entusiasmo!). Se você tem uma calculadora científica, tente digitar 69! e depois 70!. A maioria das calculadoras pode lidar com 69!, mas te dão uma mensagem de "excesso" ou "erro" no 70!. Elas não conseguem lidar com um googol. Um googolplex é um número ainda maior, ele é o número 10 elevado a potência googol,100^{googol}.

Contando as combinações

As combinações dizem a você de quantas maneiras diferentes você pode escolher *alguns elementos* de um grupo – você pode escolher qualquer coisa que vá de um até o valor ou quantidade que inclui grupo todo.Você pode:

- Descobrir de quantas maneiras pode escolher três estados para visitar.
- Descobrir quantas maneiras existem para escolher 6 números de um total de 54.
- Descobrir como escolher 8 astronautas de um grupo de 40 candidatos.

Combinações não dizem a você o que está incluído em cada uma dessas maneiras, mas dizem a você quantas são as maneiras possíveis. Depois de encontrar o total delas, você pode parar de tentar arranjos diferentes.



O número de *combinações* de *r* coisas tiradas de um total possível de n coisas é

$$_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Os subscritos no *C* dizem a você duas coisas: do lado esquerdo, o *n* indica quantas coisas estão disponíveis no todo; no subscrito da direita, o *r*, diz quantas coisas serão escolhidas dentre todas as disponíveis. O cálculo envolve encontrar *n* fatorial dividido pelo produto de *r* fatorial vezes a diferença de *n* e *r* fatorial.

Esses exemplos mostram como resolver questões contáveis usando a fórmula para o número de combinações.

- Encontre o número de maneiras diferentes de escolher 3 estados dentre 27.

  O número total de coisas, n, é 27. O número que você quer escolher de 27 é r ou 3.

  $${}_{50}C_3 = \frac{50!}{3!(50-3)!}$$

  Você precisa de uma calculadora para resolver, mas

  $${}_{50}C_3 = \frac{50!}{3!(50-3)!} = \frac{50!}{3!47!} = 19,600$$

  Existem 5.850 possibilidades diferentes de férias com três estados. Eu vou começar a listá-los.

  Acre, Alagoas e Amapá; Acre, Alagoas e Amazonas; Acre... Ok, já chega.

  Não leva muito tempo para ver a magnitude da tarefa. E isso tudo sem levar em conta a *ordem* em que os estados serão visitados. Desta forma, teríamos seis vezes mais maneiras – e isso já é *permutação.*

- Quantas maneiras existem de escolher 6 números dentre um total de 60?

  $${}_{54}C_6 = \frac{54!}{6!(54-6)!} = \frac{54!}{6!48!} = 25{,}827{,}165$$

  Imagino que seria muito trabalhoso comprar um tíquete para cada combinação em um jogo de loteria – ainda que as máquinas pudessem imprimir todos eles.

- Quantas maneiras existem de selecionar 8 astronautas dentre 40?

  $${}_{40}C_8 = \frac{40!}{8!(40-8)!} = \frac{40!}{8!32!} = 76{,}904{,}685$$

  Todos esses números são muito grandes. O que você acha de experimentar alguns exemplos mais razoáveis?

- Quantas maneiras existem de escolher dois livros de uma estante onde existem 7 livros?

  $${}_{7}C_2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{5{,}040}{240} = 21$$

  Ok, assim é melhor. Você pode escolher *Tom Sawyer* e *Tale of Two Cities ("Um Conto de duas cidades")*, ou *Tom Sawyer* e *Atlas Shrugged ("Quem é John Galt?")* e assim sucessivamente.

Ordenando as permutações

Permutações são como combinações. A principal diferença é que nas permutações a *ordem* é importante. Se você escolhe férias que envolvem viagens para o Pará, Pernambuco e Piauí existem seis maneiras diferentes de dispor as visitas.

Pará, Pernambuco, Piauí	Pernambuco, Pará, Piauí
Pará, Piauí, Pernambuco	Piauí, Pará, Pernambuco
Pernambuco, Piauí, Pará	Piauí, Pernambuco, Pará



Assim como as combinações, encontrar o número de permutações não diz a você o que elas são exatamente, mas diz a você quando você pode parar com sua lista.

O número de permutações de r coisas tiradas de um total possível de n coisas é

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Os subscritos no P dizem a você duas coisas: do lado esquerdo, o n indica quantas coisas estão disponíveis no todo e o subscrito na direita, o r, diz quantas coisas serão escolhidas dentre todas as disponíveis. O cálculo envolve encontrar n fatorial dividido pela diferença de n e r fatorial.

Temos aqui alguns exemplos que usam o método de contagem chamado permutação.

- Quantas maneiras existem pra escolher 2 livros dentre 7 de uma prateleira, quando a ordem na qual você os seleciona é importante (qual primeiro e qual segundo)?

  $_7P_2 = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = 42$ maneiras de escolher os livro
- Quantos arranjos diferentes existem das letras na palavra *"smart" (sabido)*? Quantos desses arranjos formam palavras de verdade?

  $_5P_5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{120}{1} = 120$ arranjos diferentes

Eu acho que não quero escrever todos eles, mas existem algumas palavras que podem ser formadas a partir de *SMART* (sabido): TRAMS (*bonde elétrico*), MARTS (*empório*)... Deve ser isso.

Formulando as suas próprias fórmulas

Uma fórmula é apenas uma equação ou relação que é aceita como verdadeira e usada repetidas vezes em aplicações comuns. Esse capítulo lida com muitas das fórmulas usadas com mais freqüência. Mas o número de fórmulas no mundo não tem fim. Você pode criar e usar uma fórmula própria.

As regras básicas para escrever sua própria fórmula são:

1. Atribuir letras as variáveis que representam os números nas suas situações.
2. Escrever expressões usando operações e comparações com as variáveis.
3. Verificar a precisão da fórmula. Depois use repetidas vezes.

Aqui temos um exemplo de criação de fórmula que nunca foi usada antes (pelo menos não por mim).

Você está planejando uma recepção de casamento e o salão de festas tem mesas retangulares que comportam oito pessoas, mesas redondas que comportam seis pessoas e mesas quadradas que comportam quatro pessoas. Você quer uma fórmula pra determinar quantas pessoas ficaram sentadas usando todos esses tipos de mesas.

1. **Atribua letras.**

   Deixe que P represente o número total de pessoas que podem ficar sentadas, deixe que r represente o número de mesas retangulares, que c represente o número de mesas redondas e s represente o número de mesas quadradas.

2. **Escreva uma expressão.**

   O número de pessoas em uma mesa deverá multiplicar o número de cada tipo de mesa. Todas elas serão somadas.

   $$P = 8r + 6c + 4s$$

3. **Faça o teste.**

   Se você escolhe ter cinco mesas retangulares, dez redondas e sete quadradas, então você vai poder sentar:

   $$P = 8(5) + 6(10) + 4(7) = 40 + 60 + 28 = 128 \text{ pessoas}$$

As mesas de tamanhos diferentes conferem um pouco de flexibilidade para acomodar algumas das pessoas – bem, como poderia dizer? – mais interessantes.

Capítulo 18

Resolvendo problemas

Neste capítulo:

- Usando sugestões para resolver problemas
- Combinando com problemas sobre misturas
- Mantendo sua distância com problemas sobre distância
- Usando triângulos retângulos
- Circulando o problema

Problemas podem não ser uma das coisas favoritas dos alunos de álgebra. No entanto a álgebra e seus símbolos, regras e processos funcionam como uma porta para matemática mais elevada e para o pensamento lógico. Os problemas fornecem benefícios e resultados imediatos para algumas situações do *mundo real.* Reconheço que alguns problemas são um pouco dispensáveis e, por isso, não incluo, neste capítulo, problemas sobre idade como, por exemplo: "Se Henry tinha três vezes a idade de George quando ele era 5 anos mais velho que Beth..." Quem se importa? E você também não vai encontrar nenhum problema com número inteiro consecutivo neste capítulo. Problemas com número inteiro consecutivo são mais ou menos assim: "Encontre três consecutivos pares e inteiros cuja soma é 102". A propósito, a resposta é: 32, 34 e 36. Problemas desse tipo são bons para desenvolver os padrões lógicos necessários para um estudo mais profundo da matemática, mas eu quero você ao meu lado para o desenvolvimento das questões práticas, então eu preferi deixá-los de fora.2

A álgebra permite que você resolva problemas. Desculpe, mas isso não vai ajudar você com aquele vizinho barulhento; os problemas a que me refiro são aqueles que envolvem situações sobre como dividir dinheiro de forma honesta, como fazer as coisas caberem em um quarto ou como dividir em partes. Neste capítulo você encontrará algumas aplicações práticas para a álgebra.

Organizando-se para resolver problemas

Durante a resolução dos problemas, nem sempre a equação que você deve usar ou a forma como todos os ingredientes devem interagir estão aparentemente claras. Às vezes você tem que ter um plano de jogo para poder começar. Tentar começar já pode ser uma grande ajuda. Você não é obrigado usar cada sugestão da lista a seguir, mas usar o maior número possível delas pode tornar sua tarefa mais fácil.

- Desenhe uma figura. Não precisa ser exatamente uma obra de arte. Muitas pessoas reagem bem a estímulos visuais, e uma figura pode ajudá-lo.
- Atribua uma variável (s) para representar *quantos* ou o número de. A princípio você pode usar mais de uma variável e depois transformar o problema para algo com apenas uma variável. Lembre-se, uma variável pode representar apenas um *número;* ela não pode representar uma pessoa, lugar ou coisa.
- Se você usar mais de uma variável, volte e substitua relações conhecidas por variáveis extras. Quando falamos em resolução de equações, é preferível resolver com apenas uma variável. Em muitos casos você pode reescrever todas as variáveis em função de apenas uma delas. Por exemplo, se você deixa que a represente o número de biscoitos de Ernie e b represente o número de biscoitos de Bert, e você sabe que Ernie tem quatro biscoitos a mais do que Bert, então a pode ser substituído por $b + 4$.
- Olhe para o final da pergunta ou do problema. Muitas vezes ele te dá uma grande dica sobre o que está sendo pedido e sobre o que as variáveis devem representar. Ele também pode dar dicas sobre qual fórmula usar e se tal fórmula é apropriada.
- Traduza as palavras em equações. Substitua:
  - *e, mais do que, excedido por* pelo sinal de mais
  - *menor que, menos, subtraído de* pelo sinal de menos
  - *de, vezes mais* pelo sinal de multiplicação
  - *duas vezes* por 2×
  - *dividido por* pelo sinal da divisão
  - *metade de* por ½ ×
  - o verbo (*é* ou *são*, por exemplo) pelo sinal de igual
- Use uma fórmula padrão, se for aplicável ao problema. Procure na Folha de Consulta no início do livro as fórmulas mais comuns ou vá para o Capítulo 17 para informações detalhadas.
- Desenhe recipientes para resolver problemas de misturas. Rotule cada recipiente com quantidades e qualidades. A qualidade pode ser a concentração da solução, o preço por peso do item ou uma taxa de juros.

Depois de se organizar, você está pronto para resolver a equação. Tenha certeza de verificar sua resposta para conferir se faz sentido assim como se a resposta tem exatidão. Pergunte a si mesmo se a resposta faz sentido nessa situação.

Trabalhando com o perímetro, a área e o volume

Os problemas envolvendo perímetro, área e volume estão entre os mais práticos de todos os problemas. É difícil não haver situações na vida onde você não precise lidar com um ou mais desses valores. Talvez, algum dia, você queira colocar uma cerca e

necessite encontrar o perímetro do seu quintal para ajudar determinar quanto de material você vai precisar comprar.Talvez um aumento na família signifique colocar mais um quarto na sua casa (ou construir uma casa de cachorro).Você pode usar a fórmula para descobrir quanto espaço o seu quarto novo vai ocupar. Para encontrar uma caixa e colocar o presente de aniversário de 80 anos da sua tia Bea, você talvez necessite calcular o volume do tamanho das caixas padrão e, então, construir sua própria caixa para esse presente específico. Para sua sorte, fórmulas padrão para lidar com todas essas situações estão disponíveis, e muitas delas estão nesse tópico.

Analisando o perímetro

Analisar pode significar também descrever; o *perímetro* é a medida ao redor da parte externa de uma região ou área. O perímetro é usado quando você quer colocar uma cerca ao redor de um quintal ou alguns rodapés ao longo de um quarto.



A maneira para encontrar o perímetro (P) de qualquer figura é somar o comprimento de todos os lados. Para encontrar o perímetro de um retângulo, some duas vezes o comprimento (c) e duas vezes a largura (l). A fórmula do perímetro de um retângulo é

$$P = 2l + 2c.$$

Para achar a área (A) do retângulo, multiplique o comprimento pela largura.

- Jim quer colocar uma cerca em uma parte retangular do seu quintal ao longo do rio. Ele não vai precisar de nenhuma cerca ao longo do lado do quintal perto do rio, mas somente para os outros três lados. Jim quer que seu quintal fique duas vezes maior do que largo, e ele gostaria de ter uma área de 800 metros quadrados. Quais devem ser as dimensões do quintal, e qual a quantidade de cerca que ele vai precisar?

  A primeira pergunta tem a ver com a área. A fórmula para a área do retângulo é $A = l \cdot c$. A área tem 800 metros quadrados, então $80.000 = l \cdot c$.

  No problema temos duas variáveis. Para mudar a equação para que ela tenha apenas uma variável, volte para o problema onde diz que Jim quer que o comprimento seja duas vezes maior do que a largura. Isso significa $c = 2l$. Substituindo c por $2l$ na fórmula da área, você tem $80.000 = 2l \cdot l$ ou $80.000 = 2l^2$. Ache o valor de l.

  Primeiro divida por 2: $40.000 = l^2$.

  Depois tire a raiz quadrada de cada lado: $l = 200$.

  A largura é 20 metros. O comprimento é duas vezes isso, ou seja, 40 metros.

  Se os três lados que precisam de cerca são 20 + 40 + 20, então a quantidade de cerca necessária é de 80 metros.

- Janelle projetou um trajeto para caminhadas no formato de um grande triângulo. Ela começa em uma quina, anda para a segunda quina ao longo da primeira perna (lado), anda para a terceira quina ao longo da segunda perna e volta para a primeira quina ao longo da terceira perna. A primeira perna (lado) do trajeto é 3 quilômetros menor do que quatro vezes a medida da última perna e a segunda perna é 2 quilômetros menor do que 3 vezes a medida da última perna. Se o trajeto tem no total 11 quilômetros, então qual a medida de cada perna?



O perímetro do triângulo é $P = a + b + c$ onde a, b e c são as medidas dos lados.

Desenhe um triângulo. Nomeie os lados: a para a primeira perna, b para a segunda perna e c para a terceira perna. A distância total do trajeto é de 11 quilômetros, então $a + b + c = 11$. São muitas letras. Devido ao fato das duas primeiras pernas serem comparadas ao comprimento da última perna, c, você pode escrever os comprimentos das duas primeiras pernas em relação ao da última perna:

A primeira perna, a, é 3 menos quatro vezes a medida da última perna. Devido ao fato da última perna ser c, isso faz com que a seja $4c - 3$.

A segunda perna, b, é 2 menos 3 vezes o tamanho da última perna. Isso faz com que b seja $3c - 2$.

$a + b + c = 11$, so $(4c - 3) + (3c - 2) + c = 11$

$8c - 5 = 11$

$8c = 16$

$c = 2$

Desta forma, a última perna mede 2 quilômetros, a primeira, 4c-3, é 8-3 = 5 quilômetros e a segunda perna, 3c-2, é 6-2 = 4 quilômetros. Some tudo, 5+4+2 = 11 quilômetros. Portanto, você fez tudo certo!

Arrumando a favor da área

Você quer comprar um tapete para a área. Você encontra alguém que mora na mesma área que você. Em ambos os casos, *área* pode ser interpretada como a medição de uma região ou superfície que tem uma forma e um tamanho específicos. Ao fazer problemas envolvendo área, você pode encontrá-la se você souber qual é a forma da área a ser descoberta. E depois de descobrir isso existem muitas fórmulas legais para você usar. Você só tem que combinar a forma com a fórmula.

- Eli e Ester estão pensando em aumentar a área da sala de jantar. No momento ele é um retângulo com uma área de 12 metros quadrados. O comprimento vai ser aumentado em 1 metro e a largura em 1,5 metros, a nova sala de jantar teria uma área de 22,5 metros quadrados.. Quais são as dimensões do quarto da família agora e quais serão as novas dimensões?

Desenhe um retângulo nomeando os lados menores como l e os lados maiores como c. A área do retângulo é $A = l \cdot c$, então, nesse caso, $120 = l \cdot c$.

O comprimento vai ser aumentado em 4 metros, e a largura em 5 metros, então represente as mudanças como $l + 4$ e $c + 5$.

Esta nova área tem 22,5 metros quadrados, então

No quarto original $120 = l \cdot c$, então você pode achar o valor de l e substituir isso na nova equação.

$$l = \frac{120}{c}$$

$$\left(\frac{120}{c} + 4\right)(c + 5) = 240$$

Usando o PEIU (dê uma olhada no Capítulo 10) para simplificar o lado esquerdo,

$$120 + \frac{600}{c} + 4c + 20 = 240$$

$$\frac{600}{c} + 4c = 100$$

Para resolver isso, multiplique ambos os lados por c.

$$600 + 4c^2 = 100c$$

Agora você tem uma equação quadrática que pode ser resolvida.

$$4c^2 - 100c + 600 = 0$$

Divida por 4 para tornar os números menores.

$$c^2 - 25c + 150 = 0$$

A equação quadrática é fatorada por soma e produto (desfazendo o PEIU)

$$(c - 15)(c - 10) = 0$$

Use a propriedade do produto nulo, de onde $c - 6 = 0$ ou $c - 3 = 0$, para achar as soluções:

$$c = 6 \text{ ou } c = 3$$

Se $c = 15$, então $l = \frac{120}{15} = 8$; largura é aumentada em 5 e o comprimento em 4, dando a você as novas dimensões de 20 por 12.

Se $c = 10$, então $l = \frac{120}{10} = 12$; a largura é aumentada em 5 e o comprimento em 4, dando a você as novas dimensões de 15 por 16.

Tecnicamente, parece tudo certo. Ambos funcionam, se você não se incomodar com uma sala de jantar que com apenas 2 metros de largura. Parece um corredor com 6 metros de comprimento e 2 de largura. Se você preferir uma sala mais proporcional, então apenas a primeira solução funciona: dimensões originais de 3 por 4, e novas dimensões de 4 por 5,5.

- Um parque infantil mede 100 por 30 metros. De quanto será o aumento de área se uma pista de caminhada de 2 metros de largura for somada ao redor?

Desenhe um retângulo cujos lados maiores são um pouco mais do que três vezes a medida dos lados menores para representar os 100 metros de comprimento e os 30 metros de largura do parque. Para esse retângulo, desenhe outro retângulo ao redor do primeiro e classifique a largura da tira entre eles como 2 metros.

De quanto a área deve ser aumentada?

Área nova – Área antiga = Diferença

A área nova é determinada somando 4 metros em cada uma das direções: $A = (100 + 4)(30 + 4)$. Você soma 4, porque 2 metros foram adicionados de cada lado, assim como na frente e nos fundos.

A área antiga é determinada multiplicando as duas dimensões juntas: $A = (100)(30)$

Área nova – Área antiga = $(100 + 4)(30 + 4) - (100)(30) =$
$(104)(34) - 3,000 = 3,536 - 3,000 = 356$ metros quadrados

A área aumentou em 356 metros quadradas.



Quando você descobre a área, sua resposta fica em metros quadrados, quilômetros quadrados, centímetros quadrados (ou qualquer unidade de medida ao quadrado, que você tenha escolhido para medir os comprimentos).

Enchendo o volume

A área é uma medida plana, ela pode ser mostrada em um chão ou campo de esportes e aparece sempre em duas dimensões. Quando falamos de volume é somada uma terceira dimensão, como mostra a Figura 18-1. Pense num galpão de 10m por 12m e imagine o pé direito com 8 metros de altura. Estamos falando de uma área de 10 vezes 12, ou 120 metros quadrados e, com a altura, um volume de 10 vezes 12 vezes 8 ou 960 metros cúbicos. O volume é calculado em medidas cúbicas. A quantidade de gás em um balão é uma medida cúbica. A quantidade de cimento em uma calçada também é uma medida cúbica.



Um cubo é uma caixa que tem comprimento, largura e altura iguais. Imagine um cubo de açúcar, ou um par de dados.

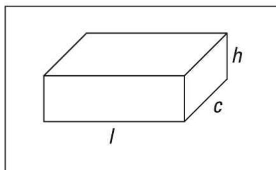


Figura 18-1: O volume é determinado multiplicando o comprimento, a largura e a altura.

- Tia Sadie fez um bom negócio com alguns bombons de chocolate. Você é a favorita dentre as sobrinhas e sobrinhos, então a tia Sadie quer enviar todos eles pra você. Ela quer enviá-los em uma caixa e sabe que os bombons ocupam um espaço de 4.000 centímetros cúbicos (também conhecido como 4 litros). Se a caixa que ela vai usar para enviá-los tem 20 por 20 centímetros na base, então qual deve ser a altura da caixa para que todos os bombons caibam dentro dela?



O volume de um prisma (cubo) é encontrado multiplicando o comprimento do cubo vezes sua largura vezes a altura: $V = l \cdot c \cdot h$.

Nesse caso, a base é quadrada e cada lado da base tem 9 polegadas, então, substituindo $V = 9 \cdot 9 \cdot h = 81h$.

Visto que os bombons ocupam o volume de 4.000 centímetros cúbicos, a fórmula do volume se torna $900 = 81h$.

Achando o valor de h, divida cada lado por 400 para ter $\frac{900}{81} = h$, ou $11\frac{1}{9}$ centímetros.

Construindo uma pirâmide

Pirâmides são uma das figuras geométricas mais conhecidas. As crianças ouvem e lêem sobre as pirâmides do Egito, você vê o formato das pirâmides em muitas coisas desde tendas piramidais a sites de meditação (Figura 18-2). Se sua tenda tem um formato de pirâmide, você pode achar o volume para ver se você e seus três amigos cabem nela. Afinal, você vai querer espaço para respirar.

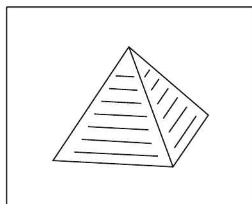


Figura 18-2: Algumas pessoas acreditam que as pirâmides têm poderes de preservação.



A fórmula para o volume de uma pirâmide com uma base quadrada é $V = \frac{1}{3} x^2 \cdot h$. O x^2 representa a área da base. Em geral, o volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base e da altura.

A Pirâmide de Quéops é uma massa sólida de blocos calcários. Estima-se que ela contém 2,3 milhões de blocos de pedra. Originalmente, ela tinha uma base quadrada de 236 metros por 236 metros e uma altura de 146 metros, mas com o tempo o vento e a areia corroeram sua estrutura. Faça de conta que ela ainda tem as dimensões originais. Se cada um dos blocos é um cubo, quais são as dimensões dos cubos?

- Você tem apenas uma medida para nomear – a medida de cada borda – então chame de x.

  Primeiro encontre o volume da pirâmide em metros cúbicos:

  $V = \frac{1}{3}\, 756^2 \cdot 480 = 91{,}445{,}760$ metros cúbicos

  Se cada bloco fosse um cubo de 1 metro por 1 metro por 1 metro, haveria um pouco mais de 2,7 milhões deles. De acordo com a estimativa, existem 2,3 milhões de blocos de pedra, então:

  $2.710.538 \div 2.300.000 \approx 1{,}1785$

  Isso quer dizer que cada um dos 2,3 milhões de blocos de pedra mede um pouco mais de 1 metro cúbico. Para encontrar a medida de cada borda, olhe para a fórmula do volume do cubo, $V = s^3$. Nesse caso, determine que x será a medida do lado.

  Assim, se $V = 39.759 = x^3$, então $x = \sqrt[3]{39.759} \approx 3.413$.

Assim cada cubo teria mais ou menos 1,06 metros em cada borda. Imagine um bloco de pedra maior que uma jarda em cada lado (dizem que algumas das pedras eram ainda maiores que isso). Agora imagine essa pedra sendo levantada e levada até o topo da pirâmide.

Circulando Júpiter

Descobrir quanto ar você tem que soprar para encher um balão de 9 polegadas é uma operação que envolve polegadas cúbicas de ar, força, propulsão e todos os tipos de coisas complicadas. Afinal de contas, você realmente se importa? Você simplesmente sopra até que o balão esteja cheio. Mas isso não quer dizer que você não queira descobrir quantos balões você vai precisar soprar para encher uma grande rede de balões que você alugou para a festa do seu filho de 5 anos.

O exemplo nesse tópico abrange esferas muito grandes – na verdade, alguns planetas – mas eu vou fazer o melhor para tentar manter seus pés no chão. A Figura 18-3 mostra a você uma esfera.

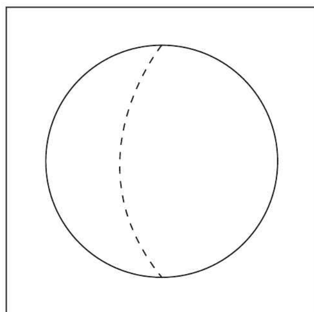


Figura 18-3: Bolas de basquete, de beisebol, globos, planetas e algumas laranjas são esferas.



Perseguindo George Dantzig

George Dantzig nasceu em 1914 e um dia, quando ainda era um aluno de pós-graduação, ele chegou atrasado para a aula de estatística. Rapidamente ele copiou os dois problemas escritos no quadro e, supondo que fossem exercícios para resolver, ele fez e entregou ao professor. Ao chegar a casa, seu professor, muito agitado, ligou para ele para dizer que ele havia resolvido dois dos mais famosos problemas irresolutos de estatística!

Dantzig começou a ficar famoso quando foi contratado pela Força Aérea dos Estados Unidos durante a Segunda Guerra Mundial para descobrir uma maneira de distribuir as armas de fogo, homens e suprimentos nas diferentes frentes para batalhas. Ele desenvolveu a "programação linear", um processo que, desde então, tem tido numerosas aplicações em atividades práticas.

- O diâmetro de Júpiter é de mais ou menos 142.800 quilômetros e o diâmetro da Terra é de mais ou menos 12.760 quilômetros. Quantos planetas Terra caberiam dentro de Júpiter?

  O volume de uma esfera (suponha que ambos são suficientemente parecidos com uma esfera) é encontrado com $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, então tudo o que você precisa saber são as medidas do raio da Terra e de Júpiter. Dividindo os diâmetros por 2, o raio da terra é de mais ou menos 6.380 quilômetros e o raio de Júpiter é de mais ou menos 71.400 quilômetros..

$$\begin{aligned} \text{Número} &= \frac{4}{3}\pi \cdot 44,320^3 \div \frac{4}{3}\pi \cdot 3,960^3 \\ &= 44,320^3 - 3,960^3 \\ &\approx 1.400 \end{aligned}$$

Mil e quatrocentos planetas Terra podem caber dentro de Júpiter. Isso te dá uma idéia do tamanho de Júpiter!

Girando ao redor de cilindros

Um cilindro tem círculos nas duas bases. A altura é a distância medida perpendicularmente entre as duas bases. Quando falamos de cilindros, você pode considerar que as bases estão acima e abaixo uma da outra, como na Figura 18-4 – o cilindro não está em declive.

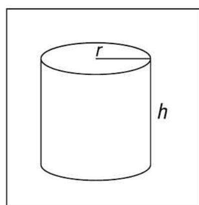


Figura 18-4: Um rolo de pastel sem os bastões é um cilindro, assim como latas de sopa e de refrigerante.

- Quando uma fábrica que produz latas de fermento em pó aumentou a altura da lata em 3 centímetros, o volume foi aumentado em 12π centímetros cúbicos (isto é aproximadamente, 37,7 mililitros). Quais são as dimensões da lata antes e depois do aumento?

  Numa primeira olhada, parece que não temos informação suficiente para responder a pergunta. Mas a relação entre as dimensões de um cilindro são tão específicas que esse é um problema completamente solucionável.

  O volume de um cilindro é encontrado com $V = \pi r^2 h$. A parte πr^2 representa a área da base circular e o h é a altura.

  A equação diz a mesma coisa que a afirmação:

  a altura do cilindro foi aumentada em 3 centímetros $\pi r^2 (h + 3) = V$

  O volume original foi aumentado em 12π: $\pi r^2 h + 12\pi = V$

  $$\pi r^2 (h + 3) = \pi r^2 h + 12\pi$$

  Distribua o lado esquerdo.

  $$\pi r^2 h + 3\pi r^2 = \pi r^2 h + 12\pi$$

  Subtraia o $\pi r^2 h$ de cada lado.

  $$3\pi r^2 = 12\pi$$

  Divida cada lado por 3π.

  $$r^2 = 4$$

  O raio é de 2 centímetros

  $$r = 2$$

Na verdade, a altura pode ser qualquer valor. Você pode substituir a altura por qualquer número, e desde que seja $r = 2$, você sempre conseguirá uma afirmação verdadeira, assim como $\pi = \pi$ ou $0 = 0$. Isso significa que se o raio mede 2 centímetros, um aumento de 3 centímetros na altura sempre vai ter a mesma mudança no volume.

Fazendo misturas

Problemas sobre misturas podem aparecer de muitas formas diferentes. Existem os tipos tradicionais onde, de fato, você pode misturar uma solução e outra como, por exemplo, água e um fluido anti-congelante. Existem tipos onde ingredientes sólidos diferentes são misturados, como por exemplo, em uma tigela de salada ou em um prato de doces. Outro tipo é quando investimentos diferentes a taxas de juros diferentes são misturados juntos. Eu juntei todos esses tipos de problemas porque eles basicamente usam o mesmo processo para resolvê-los.

Desenhar uma figura ajuda na resolução de todos os problemas sobre mistura. A mesma figura pode funcionar para todos: líquidos,sólidos e investimentos.A Figura 18-5 mostra três exemplos de recipientes – dois somados juntos para ter um terceiro (a mistura). Em cada caso,os recipientes estão classificados com a "qualidade" e "quantidade" dos conteúdos. Essas duas coisas são multiplicadas juntas antes de serem somadas.A *qualidade* é a concentração do fluido anticongelante a porcentagem de juros ou o preço do ingrediente.Você pode usar a mesma figura para os recipientes em qualquer problema sobre mistura, ou você pode mudar para tigelas ou caixas. Isso não importa – você apenas quer visualizar a maneira como a mistura "anda de mãos dadas".

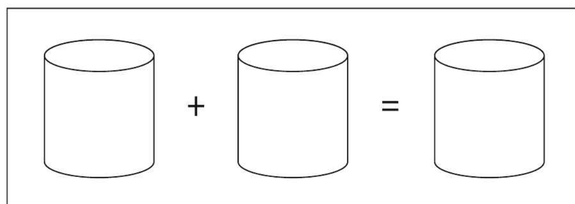


Figura 18-5: Visualizar os recipientes pode ajudar com problemas sobre misturas.

Misturando soluções

O problema com as soluções mais simples são aqueles sobre misturar água e um fluido anticongelante.. Então, para satisfazer os donos de carros, um problema sobre água / fluido anticongelante vem a seguir.Você também pode resolver um problema que envolve minha bebida favorita: leite com chocolate. Quando os líquidos são misturados, a força dos dois líquidos chega a uma média.

- Quantos litros de anticongelante à concentração de 80% precisamos adicionar a 8 litros de anticongelante a 20% para obtermos uma mistura com concentração de 60%?

  Primeiro nomeie seus recipientes. O primeiro será nomeado com 80% no topo e x na base (eu não sei quantos quartos de galão devem ser adicionados). O segundo recipientes será nomeado com 20% no topo e 8 litros na base. O terceiro recipiente, que representa a mistura final, será nomeado com 60% no topo e x + 8 litros na base. Para resolver isso, multiplique cada "qualidade" ou concentração percentual do fluido vezes a sua "quantidade" e coloque-os na equação.

  $$80\% \times x \text{ quartos de galão} + 20\% \times 8 \text{ quartos de galão} = 60\% \times (x+8) \text{ quartos de galão}$$

  $$0{,}8x + 0{,}2\,(8) = 0{,}6\,(x+8)$$

  $$0{,}8x + 1{,}6 = 0{,}6x + 4{,}8$$

  Subtraindo $0{,}6x$ de cada lado e subtraindo 1,6 de cada lado, eu tenho $0{,}2x = 3{,}2$

  $x = 16$ litros de fluido anticongelante à concentração de 80% devem ser adicionados.

- Quanto leite e calda de chocolate devem ser misturados para se ter um copo de leite de 300ml com 30% de calda de chocolate?

  As porcentagens aparecem em termos de quantidade da calda de chocolate, então a calda de chocolate pura é 100% e o leite puro é 0%. Deixe que x represente o número de onças de leite.

  O primeiro recipiente deve ser nomeado com 0% de calda de chocolate no topo e x ml na base. O segundo recipiente com 100% no topo e (300-x) ml a base. Você não quer que o copo transborde e a calda de chocolate tome todo o espaço, então você tem que subtrair a calda do total de 300ml. No terceiro recipiente, a mistura deve ter 30% no topo e 12 onças na base.

  $$0\% \times x \text{ ml} + 100\% \times (300 - x) \text{ ml} = 30\% \times 300 \text{ ml}$$

  $$0 + 1(300 - x) = 0{,}3(300)$$

  $$300 - x = 3.6$$

  $x = 210$ml de leite; a isso eu somo 90ml de calda de chocolate

Você pode usar essas regras de mistura de líquidos com molhos para saladas, coquetéis e todos os tipos de mistura.

Colocando algumas misturas sólidas

Você também tem muitas ocasiões para fazer misturas sólidas: misturar os ingredientes secos para um bolo, misturar uma salada verde ou fazer aquelas boas misturas de amendoins com passas (eu receio ser louca por comida). Esse tópico mostra como misturar objetos sólidos usando a álgebra.

Você alguma vez já comprou uma lata de castanhas? Eu sempre escolho as de caju. Você pensa consigo mesmo porque a lata parece ter bem pouco das castanhas e muitos amendoins? Bem, alguns tipos de castanhas são mais caros que outros, e algumas são mais populares do que as outras. As pessoas que fazem a mistura levam esses fatores em consideração quando planejam as proporções para uma mistura em que é desejável um preço acessível.

- Quantos quilos de castanha de caju, que custa $27,50 por quilo, devem ser misturados a 3 quilos de amendoim, que custa $10,00 por quilo, para se criar uma mistura que custa $15,00 por quilo? (Você pode usar essa fórmula para economizar no orçamento de sua próxima grande festa).

  Usar recipientes pode ajudar nesse problema. Deixe que x represente o número de quilos de castanha de caju. A qualidade é o custo das castanhas e a quantidade é o número de quilos. O primeiro recipiente deve ter $27,50 no topo e x quilos na base. O segundo recipiente deve ter $10,00 no topo e

3 quilos na base. O terceiro recipiente, com a mistura, deve ter $15,00 no topo e $x + 3$ na base.

$$5.50x + 2.00(3) = 3.00(x + 3)$$

$$5.50x + 6.00 = 3.00x + 9.00$$

Subtraindo 15.00x de cada lado e 30,00 de cada lado, você tem 12.50x=15,00

$x = \frac{3.00}{2.50} = 1.2$ quilos de castanhas de caju misturadas com 3 quilos de amendoim para criar uma mistura de 4,2 quilos de castanhas que custam $15,00 por quilo.

Investigando investimentos e juros

Você pode investir seu dinheiro em um certificado de depósito seguro ou em uma poupança e obter vantagens com uma taxa de juros. Você também pode apostar em investimentos arriscados e obter uma taxa de juros ainda maior, mas você corre o risco de perder dinheiro. A maioria dos consultores financeiros sugere que você diversifique – coloque um pouco de dinheiro em cada tipo de investimento – para tirar vantagem do ponto positivo de cada investimento.

Use a fórmula de juros simples em cada um desses exemplos para tornar as coisas mais fáceis (na prática, os juros compostos são usados com mais freqüência pelas instituições financeiras). Os juros simples são aplicados somente na quantidade inicial, enquanto os juros compostos são aplicados sobre os montantes acumulados, conforme os juros são periodicamente somados ao investimento original.

- Khalil tinha $20.000 para investir no ano passado. Ele investiu parte do seu dinheiro a uma taxa de $3\frac{1}{2}\%$ e o restante a uma taxa de 8%. O seu ganho total em juros, para ambos os investimentos, foi de $970. Quanto ele investiu em cada taxa?

  Use os recipientes de novo. Faça x representar a quantidade de dinheiro investida a uma taxa de $3\frac{1}{2}\%$. O primeiro recipiente tem $3\frac{1}{2}\%$ no topo e x na base. O segundo recipiente tem 8% no topo e $20.000 - x$ na base. O terceiro recipiente, a mistura, tem $970 bem no meio. Esse é o resultado da multiplicação das porcentagens da mistura vezes o investimento total de $20.000. Você não precisa saber a porcentagem da mistura, apenas o resultado.

  $$3\frac{1}{2}\%(x) + 8\%(20,000 - x) = 970$$

  $$0.035(x) + 0.08(20,000 - x) = 970$$

  $$0.035x + 1600 - 0.08x = 970$$

  Subtraia 1600 de cada lado e simplifique o lado esquerdo.

  $$-0.045x = -630$$

$x = 14.000$; isso significa que $14.000 foram investidos a uma taxa de $3\frac{1}{2}\%(x)$ e os outros $6.000 foram investidos a uma taxa de 8%.

- Kathy quer sacar somente os juros do seu investimento em cada ano. Ela vai colocar o dinheiro em uma conta e deixá-lo lá, apenas recebendo os ganhos dos juros. Ela quer sacar e gastar $10.000 em cada ano. Se ela colocar $\frac{2}{3}$ do dinheiro em uma aplicação na qual possa ganhar 5% de juros e o resto do dinheiro em outra a 7% de juros, quanto ela deve colocar em cada taxa para ter $10.000 de dinheiro para gastar?

  Deixe que x represente o valor total de dinheiro que Kathy precisa para investir. O primeiro recipiente tem 5% no topo e $\frac{2}{3}x$ na base. O segundo recipiente tem 7% no topo e $\frac{1}{3}x$ na base. O terceiro recipiente, ou mistura, tem $10.000 no meio; este é o resultado da porcentagem "misturada" e o valor total do investimento.

  $$5\% \times \left(\frac{2}{3}x\right) + 7\% \times \left(\frac{1}{3}x\right) = 10.000$$
  $$0.05\left(\frac{2}{3}x\right) + 0.07\left(\frac{1}{3}x\right) = 10.000$$

  Transforme os decimais em frações e multiplique.

  $$\frac{1}{30}x + \frac{7}{300}x = 10.000$$

  Encontre um denominador comum e some os coeficientes de x.

  $$\frac{17}{300}x = 10.000$$

  Divida cada lado por $\frac{17}{300}$.

  $$x \approx 176,470.59$$

  Kathy precisa mais que $176.000 para investir. Dois terços $\left(\frac{2}{3}\right)$ disso, mais ou menos $117.647, devem ser investidos a uma taxa de 5% e o resto, mais ou menos $58.824, a uma taxa de 7%.

Indo atrás "da verdinha": dinheiro

Dinheiro é o tópico favorito de todo mundo. É algo com o que todos podem se relacionar. É uma bênção e uma maldição. Quando você está combinando dinheiro em álgebra, você tem que considerar o número de moedas ou cédulas e o valor ou denominação delas. Outras situações envolvendo dinheiro podem incluir taxas de matrícula, preços das diferentes pizzas em um pedido ou qualquer tipo de produto com preços variáveis.

Lidando com moedas e notas

Para todos os fins, as moedas e cédulas do Brasil são usadas nos exemplos nesse tópico. Eu não quero incluir moedas de outros países e acabar complicando as coisas.

- E uma caixa de banco, a quantidade de moedas de 25 centavos é o quíntuplo da quantidade de moedas de 10 centavos, três moedas de 5 centavos a mais do que de 10 centavos e duas moedas de 1 centavo a menos do que a quantidade de moedas de 10 centavos. Se ela tem $15,03 em moedas, quantas delas são moedas de 25 centavos?

  Os recipientes também funcionam nesse problema. Vão existir quatro deles: para as moedas de dez centavos, para as de vinte e cinco centavos, para as de cinco centavos e para as de um centavo. A qualidade é o valor de cada moeda. Nesse problema, cada contagem de moeda se refere às moedas de dez centavos, então deixe que o número de moedas de dez centavos seja representado por x e compare todo o resto a ele.

  O primeiro recipiente deve conter as moedas de dez centavos. Coloque 0,10 no topo e x na base. O segundo recipiente contém as moedas de vinte e cinco centavos; coloque 0,25 no topo e $5x$ na base. O terceiro recipiente contém as moedas de cinco centavos; então coloque 0,05 no topo e $x + 3$ na base. O quarto recipiente contém as moedas de um centavo; coloque 0,01 no topo e $9x - 2$ na base. O recipiente da mistura, tem $15,03 bem no meio.

  $0.10(x) + 0.25(5x) + 0.05(x + 3) + 0.01(9x - 2) = 15.03$
  $0.10x + 1.25x + 0.05x + 0.15 + 0.09x - 0.02 = 15.03$
  $1.49x + 0.13 = 15.03$; simplifique a parte da esquerda.
  $1.49x = 14.90$; subtraindo 0,13.
  $x = 10$

  Como x é o número de moedas de dez centavos, então há dez moedas de dez centavos, cinco vezes mais ou 50 moedas de vinte e cinco centavos, três mais ou 13 moedas de cinco centavos e duas menos do que nove vezes ou 88 moedas de um centavo. A pergunta era, "Quantas moedas de vinte e cinco centavos?". Há 50 moedas de vinte e cinco centavos, as outras repostas são usadas para verificar se tudo saiu correto.

Confrontando outros produtos

Outros tipos de problemas de mistura com dinheiro podem tomar várias formas. Os problemas mais típicos lidam com venda de tíquetes ou recibos de bilheteria. Eu resolvo um desses aqui, é um sobre venda a varejo.

- O valor total dos recibos diários da bilheteria de um parque de diversões foi de $27.500. Tíquetes para adultos custam $15 cada, e para crianças, $5 cada. Quantas crianças estiveram no parque nesse dia, se o número total de visitantes pagantes foi de 3.500?

  Deixe que x represente o número de crianças que foram ao parque nesse dia. Some o preço do tíquete para crianças vezes o número de crianças ($5x$) ao preço do tíquete para adultos (15) vezes o número de adultos ($3.500 - x$) para ter o total de $27.500.

  $5x + 15(3500 - x) = 27.500$
  $5x + 52.500 - 15x = 27.500$
  $52.500 - 10x = 27.500$
  $-10x = -25.000$



Brincando com as médias

Quando alguém pede a você uma nota média ou uma altura média você, geralmente, pressupõe que é a média onde você soma todas as notas ou alturas e então divide pelo número de coisas que foram somadas juntas. Isso é chamado de média aritmética.

Na verdade existem duas outras médias usadas com freqüência que oferecem "boas" respostas às perguntas, "Qual é a usual? "O que é esperado?". As outras duas médias são a mediana e a moda. A mediana é o valor exatamente no meio, se você coloca as notas em ordem crescente ou decrescente. A moda é o resultado que ocorre com mais freqüência.

Considere os números: 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 5. A média aritmética é: $27 \div 9 = 3$; a mediana é a nota do meio, ou 4. A moda é o valor que tem mais freqüência, também 4. Cada uma dessas médias está "certa". As diferentes médias são usadas em situações diferentes. Dependendo do caso, às vezes uma ou outra é que mostra uma resposta mais apropriada para a pergunta "O que é esperado?".

$x = 2.500$

Havia 2.500 crianças com tíquetes de $5 cada e 1.000 adultos com tíquetes de $15 cada.

- Na semana passada um varejista fez uma liquidação para os sapatos, selecionou pares pelos preços de $40, $60 e $70. O dono vendeu duas vezes mais sapatos de $60 do que os de $70 e cinco vezes mais sapatos de $40 do que os de $60. A renda dos produtos em liquidação foi um total de $7080. Quantos sapatos de cada preço ele vendeu?

  Deixe que x represente o número de pares de sapato de $70. Não há nenhum item a qual todos os outros estejam sendo comparados, mas escolher esses sapatos permite que você evite frações. Isso também pode ser feito deixando que a variável represente outro preço. Eu apenas escolhi aquele que considero ser o mais fácil.

  Se x representa o número de pares de sapatos de $70, então duas vezes isso é $2x$, o número de pares de sapatos de $60. Cinco vezes o número de sapatos de $60 seria $5(2x) = 10x$ pares de sapatos de $40.

  O primeiro recipiente tem x e $70, o segundo tem $2x$ e $60 e o terceiro tem $10x$ e $40. A soma dos produtos é $7.080.

  $70(x) + 60(2x) + 40(10x) = 7.080$

  $70x + 120x + 400x = 7.080$

  $590x = 7.080$

  Ele vendeu 12 pares de sapatos de $70, 2(12) = 24 pares de $60 e 10(12) = 120 pares de $40.

Completando o percurso

Você viaja, eu viajo, todo mundo viaja, e em algum ponto da viagem todo mundo se pergunta "Já chegamos?". A álgebra não pode responder essa pergunta para você, mas pode ajudar você há estimar o tempo que leva para chegar lá – aonde quer que seja.

A fórmula da distância, $d = vt$, diz que a distância é igual a velocidade multiplicada pelo tempo que leva para chegar do ponto inicial até o destino. Você pode aplicar essa fórmula e suas variações para determinar o tempo, a distância e a velocidade em que você viaja. Nesse tópico, essas aplicações estão divididas em problemas de distância mais a distância e problemas de distância igual a distância. Eles têm padrões e métodos iguais para resolvê-los. Os problemas de ***distância mais distância*** ocorrem quando dois objetos estão seguindo em direções opostas ou de encontro um ao outro e você emprega a soma de suas distâncias. Problemas de ***distância igual a distância*** ocorrem quando os objetos seguem na mesma direção com o mesmo lugar de partida e chegada, e eles apenas vão a velocidades diferentes ou em tempos diferentes.

Calculando a distância mais a distância

Um dos dois problemas básicos de distância ocorre quando um objeto viaja certa distância, um segundo objeto viaja outra distância e as duas distâncias são somadas juntas. Poderíamos tomar como exemplo duas crianças com walkie-talkies seguindo em direções opostas para ver a que distância chegam até que não possam mais se comunicar. O outro problema sobre distância seria aquele em que dois carros deixam cidades diferentes seguindo de encontro um ao outro na mesma estrada e você precisa descobrir onde eles se encontram.

- Pâmela e Eduardo estão apaixonados e vão se encontrar em Brasília para se casar. Pâmela embarcou em um trem ao meio dia, no sentido norte rumo à cidade de Brasília. Duas horas depois, Eduardo embarcou no trem no sentido sul rumo à Brasília e viajando a uma velocidade de 20 quilômetros por hora mais rápido do que o trem de Pâmela. Ao meio dia, eles estavam a 1.100 quilômetros um do outro. Às 9 da noite, ambos chegaram à Brasília. Qual a velocidade em que eles viajaram?

  Distância de Pâmela para Brasília + Distância de Eduardo para Brasília = 1.100

  Velocidade × Tempo + Velocidade × Tempo = 1.100

  Faça que a velocidade do trem de Pâmela seja representada por v. O trem de Eduardo estava viajando a 20 quilômteros por hora (km/h) mais rápido do que o trem de Pâmela, então a velocidade do trem de Eduardo é $v + 20$.

  Faça que o tempo levado pelo trem de Pâmela seja representado por t. O trem do Eduardo saiu duas horas depois do de Pâmela, então o tempo levado pelo trem do Eduardo é $t - 2$

$r \cdot t + (r + 20)(t - 2) = 1,100$

O tempo é de 9 horas para o trem da Pâmela e $t - 2$ ou 7 horas para o trem do Eduardo. Substituindo esses valores na equação.

$r \cdot 9 + (r + 20) \cdot 7 = 1,100$

Agora distribua o 7.

$9r + 7r + 140 = 1,100$

Combine os dois termos com r.

$16r = 960$

Divida cada lado por 16.

$r = 60$. O trem da Pâmela viaja a 60km/h; o trem do Eduardo viaja a v+20, ou 80km/h.

Calculando a distância igual à distância

O outro problema de distância tradicional envolve situações onde você expõe uma distância *semelhante* à outra. Isso acontece, por exemplo, quando uma pessoa precisa alcançar outra ou quando o carro de polícia precisa alcançar um motorista veloz – esses são problemas típicos onde as distâncias são iguais, mas as velocidades e os tempos são diferentes.

- Taurique saiu do trabalho as 7:00 a.m andando na sua bicicleta a uma velocidade de 12 quilômetros por hora (km/h). As 7:15 a.m., Tanisha notou que ele havia esquecido sua maleta e o seguiu no seu carro a uma velocidade de 24 quilômetros por hora. Quando Tanisha conseguiu alcançar Taurique?

  Nesse caso, as duas distâncias viajadas são as mesmas:

  Distância que Taurique anda = Distância que Tanisha dirige, e Velocidade de Taurique × Tempo de Taurique = Velocidade de Tanisha × Tempo de Tanisha

  Deixe que t represente o tempo que Taurique viajou. Devido ao fato de Tanisha só ter partido 15 minutos depois, represente o seu tempo com $t - \frac{1}{4}$. Transforme os 15 minutos em $\frac{1}{4}$ de hora porque as velocidades estão em milhas por *hora*.

  $$12\,\text{mph} \times t = 24\,\text{mph} \times \left(t - \frac{1}{4}\right)$$
  $$12 \cdot t = 24\left(t - \frac{1}{4}\right)$$
  $$12 \cdot t = 24t - 6$$
  $$-12t = -6$$

  $t = \frac{1}{2}$. Foi preciso $\frac{1}{2}$ hora, após a partida de Taurique, para que Tanisha o alcançasse. Então, ela o encontrou as 7:30 a.m.

Retificando os triângulos retângulos

Desde que Pitágoras determinou o quão maravilhoso são os triângulos retângulos e as relações entre seus lados,suas possibilidades de aplicações não têm tido mais fim.O teorema de Pitágoras diz que a relação entre os dois lados menores,a e b e a hipotenusa c – o maior lado oposto ao ângulo reto – é $a^2 + b^2 = c^2$.

Escalando as alturas

Você pode determinar a altura de muitos objetos usando as fórmulas para triângulos retângulos. Por exemplo, você pode descobrir a altura de um prédio ou árvore usando suas sombras.Você pode calcular a altura de um mastro de bandeira ou a altura do andar onde está o rapaz com o balão de água. É claro que para descobrir a altura de objetos do lado de fora,você pode supor que as árvores e os prédios formam um ângulo reto com o solo.Embora isso nem sempre seja *verdade*.No entanto,geralmente isso é o suficiente para objetivos práticos.

- Tom está empinando sua nova pipa.Quando Tom tem 200 metros de linha solta,Don está logo abaixo da pipa e a 50 metros de distância de Tom. Qual a altura da pipa? A Figura 18-6 mostra a figura com a qual trabalhar.

  Nesse problema,a quantidade de corda solta está formando um ângulo e a corda forma a hipotenusa do triângulo retângulo.A distância de Tom para Don é a base do triângulo retângulo.Nesse problema,vou deixar que a represente a base e c a corda.

  $$a^2 + b^2 = c^2$$

  $$50^2 + b^2 = 200^2$$

  $$2,500 + b^2 = 40,000$$

  $$b^2 = 37,500$$

  $$b = \sqrt{37,500} \approx 193.65 \text{ metros de altura}$$

- A pipa de Tom está presa no topo de uma árvore.A árvore está fazendo uma sombra de 9 metros no chão. Tom tem um pedaço de trena (de apenas um metro),que espeta na terra,na vertical,e faz uma sombra de 60 centímetros no chão.Tom quer saber se ele precisa de uma escada ou de um helicóptero para pegar a sua pipa.Calcular a altura da árvore pode ajudar a tomar essa decisão.

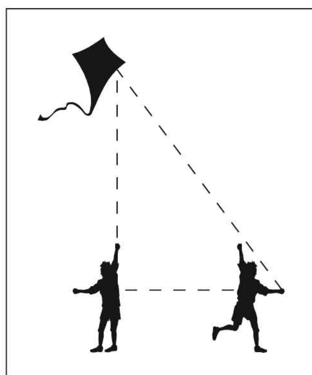


Figura 18-6: Pipas e alturas

Nesse caso, dois triângulos retângulos são formados. Um é representado pela árvore, sua sombra e a linha do topo da árvore até o fim da sombra. O outro triângulo retângulo é a régua, sua sombra e a linha do topo da régua até o final da sua sombra. Os triângulos retângulos são semelhantes porque o sol está iluminando o topo em ângulos iguais. Escreva uma proporção para resolver o problema, usando as duas sombras, ou lados a, e as duas alturas, ou lados b.

(sombra da árvore) ÷ (altura da árvore) = (sombra da régua) ÷ (altura da régua)

Deixe que x represente a altura da árvore, desde que este seja o único valor que você ainda não conheça.

$$\frac{30\text{ pés}}{x} = \frac{2\text{ pés}}{3\text{ pés}}$$

$$\frac{30}{x} = \frac{2}{3}$$

$30 \cdot 3 = 2 \cdot x$ usando a multiplicação cruzada

$90 = 2x$

$x = 45$, então a altura da árvore é de 45 pés. É melhor que Tom esqueça a pipa.

Resolvendo distâncias de superfície

Algumas vezes um triângulo retângulo pode ser usado para encontrar certas distâncias quando você não pode fazer todas as medições. Esses momentos podem surgir no caso da necessidade de achar a distância de um barranco, um lago ou um pântano.

- Uma pequena vila quer construir uma ponte acima do lago local para tornar a ida à cidade mais fácil. A cidade fica a leste do lago da vila. Se você dirigir no sentido sul da pequena vila por $1\frac{1}{3}$ quilômetro, você chega à estrada que vai direto para a cidade. A distância de onde as estradas se cruzam para a cidade é de $1\frac{2}{3}$ quilômetro. Qual deve ser o comprimento da ponte?

Essa é uma maneira difícil de desenhar um triângulo retângulo, mas aqui há um triângulo retângulo. A ponte é um lado e a distância do sul até o cruzamento das estradas é outro lado. A estrada do cruzamento do sul até a cidade grande é a hipotenusa.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Deixe que *a* represente o comprimento da ponte.

$$a^2 + \left(1\frac{1}{3}\right)^2 = \left(1\frac{2}{3}\right)^2$$

$$a^2 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$$

$$a^2 = \frac{9}{9} = 1$$

Assim *a* é um quilômetro Se eles construírem uma ponte de um quilômetro de comprimento, podem economizar 2 quilômetros ao dirigir para a cidade.

- Dois aviões decolam do aeroporto na mesma hora. Um voa para o norte a uma velocidade desconhecida e o outro voa para o leste a uma velocidade de 800 quilômetros por hora. Depois de 3 horas, os aviões estão a 3.000 quilômetros de distância um do outro. Qual é a velocidade do avião rumo ao norte?

  Um triângulo retângulo é formado pelos trajetos dos lados que seguem para o norte e para o leste. A hipotenusa é a distância a que eles estão um do outro.

  $$a^2 + b^2 = c^2$$

  Deixe que *a* represente a distância que o avião rumo ao norte viajou depois de 3 horas. A letra *b* pode representar a distância que o avião rumo a leste viajou; isto seria 2.400 quilômetros, porque $d = vt$, e o avião viajou a 800km/h por 3 horas A letra c representa a distância entre eles, ou 3.000 quilômetros.

  $$a^2 + 1,200^2 = 1,500^2$$

  $$a^2 = 1,500^2 - 1,200^2$$

  $$a^2 = 810,000$$

  $$a = 900$$

  Sabendo que a representa a distância viajada em 3 horas, a velocidade pode ser determinada por $d = vt$.

  $$1.800 = v \cdot 3$$

  r = 300 milhas por hora

  v = 600 quilômetros por hora

Dando a volta em círculos

O círculo, como mostra a Figura 18-7, é uma figura muito legal e eficiente, embora usar uma figura circular nem sempre seja prático. Os círculos não se encaixam bem em qualquer lugar. Há sempre espaço de sobra entre eles,

por isso eles não são bons formatos para campos, quintais ou áreas compartilhadas com outras pessoas. Mesmo com esse problema os círculos são úteis e possibilitam resolver problemas que envolvem a sua área: tapetes e pistas de corridas circulares ou campos e piscinas no mesmo formato.

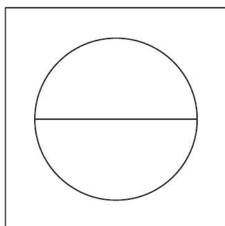


Figura 18-7: O diâmetro é a maior distância que perpassa o círculo.

A área de um círculo pode ser determinada se você sabe o raio ou o diâmetro.

- Grace decidiu comprar uma piscina de superfície de 18 metros de diâmetro ao invés de uma de 12 metros de diâmetro. Qual a área que a piscina maior vai ocupar?

  A área do círculo é encontrada através de $A = \pi \cdot r^2$.

  O diâmetro do círculo é duas vezes o raio, então uma piscina com 18 metros de diâmetro tem um raio de 9 metros, e uma piscina com 12 metros de diâmetro tem um raio de 6 metros.

  Diferença em área = Área da piscina maior – Área da piscina menor

  Diferença = $\pi(9)^2 - \pi(6)^2 = 81\pi - 36\pi = 45\pi \approx 141.4$ metros quadrados

- Se você tem certa quantidade de cerca, você pode cercar uma área maior em formato circular do que em qualquer outro formato. Para provar isso, esse exemplo mostra o quão maior pode ser um quintal circular cercado por 314 metros de cerca do que quintal quadrado cercado pela mesma quantidade de cerca.

  A área do círculo é encontrada com $A = \pi r^2$, e a área do quadrado é calculada por $A = s^2$. Parece que isso será razoavelmente fácil, você só tem que encontrar a diferença entre os dois valores.

  Diferença = Área do círculo – Área do quadrado

  O desafio aparece quando você precisa do valor de r, o raio do círculo e o valor de s, a medida do lado do quadrado. Você não tem esses valores. Você só tem a distância ao redor da parte externa chamada de *perímetro*. Mas há uma fórmula para cada figura.

  O perímetro do círculo é a sua circunferência que é encontrada com $C = 2\pi r$, e o perímetro do quadrado é achado por $P = 4s$.

  Se 314 é o perímetro do quadrado, então, $314 = 2\pi r$, então $r = 314/2\pi \approx 50$.

  Portanto, a área do quadrado é $A = \pi 50^2 = 2500\pi \approx 7,854$ metros quadrados.

  O perímetro do quadrado é apenas 4 vezes a medida do lado.

Capítulo 19

Atividade visual: desenhando gráficos

Neste capítulo:

Apontando para os pontos

Encontrando a linha entre dois pontos

Colocando linhas e equações em gráficos

Procurando o coeficiente da linha usando o eixo *x* e o eixo *y*

Trabalhando com parábolas no formato de U

Uma imagem vale por mil palavras. Isso é especialmente verdadeiro na álgebra. Imagens ou gráficos dão uma impressão instantânea do que está acontecendo em uma situação ou o que uma equação está representando no espaço. Um *gráfico* é um desenho que ilustra uma operação algébrica ou uma equação em um plano bi-dimensional (como um pedaço de papel quadriculado). Um gráfico permite que você veja de imediato as características de uma afirmação algébrica. As palavras necessárias para descrever o que você vê em um gráfico talvez sejam compridas e complicadas.

A maioria das pessoas está familiarizada com gráficos no formado de barras e seus retângulos no topo, que, geralmente, representam notas de provas. Gráficos no formato de tortas – um círculo com fatias de tamanhos diferentes – são bons para mostrar as proporções de um todo como, por exemplo, de que maneira uma quantidade de dinheiro é gasta. Os gráficos no formato de linha são ótimos para representar o crescimento e a queda da bolsa de valores e para mostrar atividades através ao longo do tempo.

Em álgebra, os gráficos são únicos porque eles revelam relações que você pode usar para representar uma situação: uma linha pode representar a depreciação de valor, parábolas podem representar a temperatura diária ou uma linha simples, no formato de S, pode representar o número de pessoas infectadas por uma gripe. Todos esses e outros modelos de gráficos são úteis para mostrar o que está acontecendo e prever o que pode acontecer no futuro.

Equações algébricas conectam-se com os gráficos. Com operações algébricas e técnicas aplicadas às equações para torná-las mais manejáveis, as equações podem ser usadas para prever, projetar e descobrir muitos problemas.

Desenhar gráficos é legal

Considere as três maneiras de expressar a mesma coisa em cada um dos exemplos a seguir: através de palavras, através de uma equação algébrica e na forma de um gráfico.

- Todos os pares de números que somam 10.
- $x + y = 10$
- O gráfico mostrado na Figura 19-1

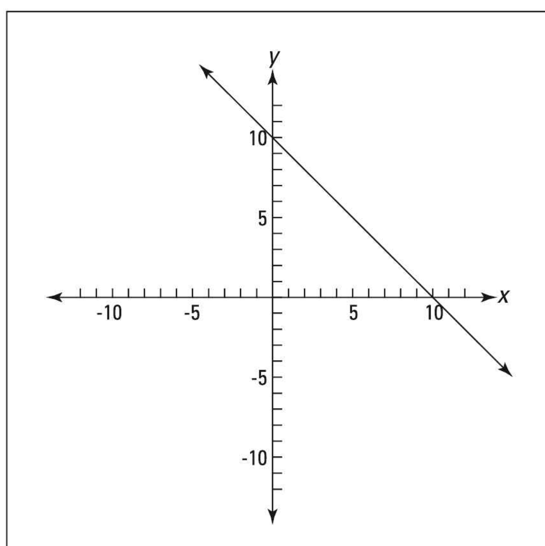


Figura 19-1: Todas as possibilidades para x + y = 10.

E, de novo:

- Todos os pares de números que você consegue quando você escolhe um número e obtém o segundo número subtraindo o primeiro número do seu quadrado.
- $y = x^2 - x$
- O gráfico a seguir (veja a Figura 19-2).

A equação algébrica descreve a situação de uma maneira mais concisa do que a descrição verbal. No entanto, o gráfico fornece uma idéia ainda melhor daquilo que está sendo descrito através das palavras ou da equação.

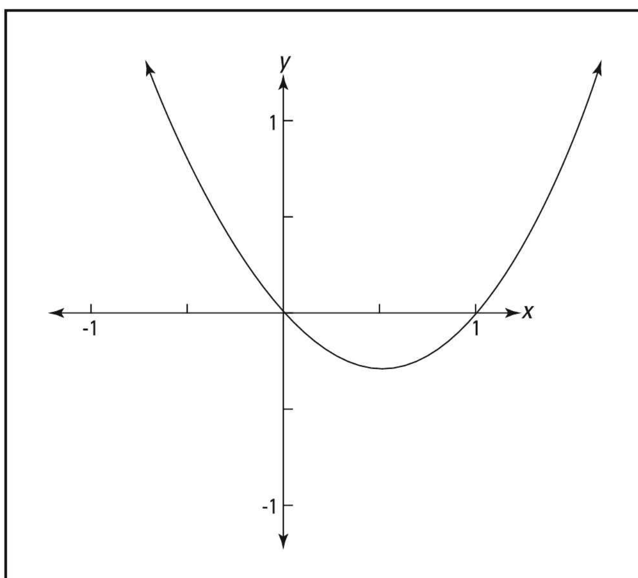


Figura 19-2: Todas as possibilidades para $y = x^2 - x$.

Lutando com os gráficos

Os cartoons em um jornal mostram freqüentemente um homem de negócios preocupado apontando para um gráfico cheio de subidas e descidas – geralmente o clímax envolve uma grande queda nas vendas. Além de muito divertidos, esses cartoons também apontam objetivamente a maior utilidade dos gráficos. Os gráficos fornecem uma informação instantânea sobre qual é o menor valor e qual é o maior valor possível numa situação. Eles dão informações sobre tendências, padrões e posição atual. Outra ótima aplicação para gráficos é colocar dois deles numa mesma figura para compará-los.

Em termos mais simples, em álgebra, um gráfico é desenhado em um *plano cartesiano* – duas linhas que cortam perpendicularmente para formar quatro seções ou *quadrantes*. As duas linhas, ou *eixos,* são linhas numeradas geralmente marcadas com números inteiros (números inteiros positivos e negativos e mais o zero). Os números positivos ficam na parte de cima do eixo vertical e à direita no eixo horizontal. A Figura 19-3 mostra um plano cartesiano. A linha indo para a esquerda e direita – a linha horizontal – é o *eixo x* e a linha vertical indo para cima e para baixo é o *eixo y*.

As pequenas marcas nos eixos são chamadas de *marcas de escala.* Elas são todas espaçadas de maneira uniforme (como os tique-taques dos relógios a mesma hora de distância) e são, geralmente, nomeados com números inteiros, negativos a positivos, da esquerda para a direita e de baixo para cima, com o zero no meio – no ponto onde os eixos se encontram.

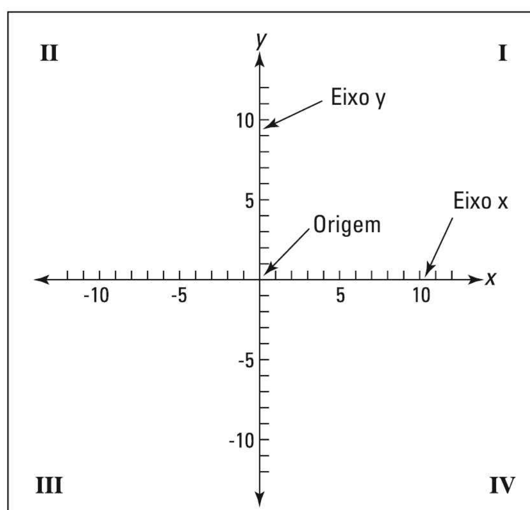


Figura 19-3: Um gráfico mostrando o eixo x, o eixo y e o ponto de origem.

Os quatro quadrantes são numerados com algarismos romanos em letra maiúscula, I, II, III e IV, começando no quadrante da parte superior direita e seguindo no sentido anti-horário. A razão para isso é simples: é a tradição. A Tabela 19-1 ilustra os quadrantes e seus nomes e posições.

Fazendo um ponto

Você faz a localização de um ponto, da mesma forma que se faz na construção de um gráfico, quando você encontra onde fica Niterói, no estado do Rio de Janeiro, na posição G-7 do mapa rodoviário. Você move seu dedo para que fique abaixo do G e ao longo do 7. Desenhar gráficos em álgebra é apenas um pouco diferente porque os números substituem as letras e você precisa começar no meio, o ponto de origem.

Pontos são pontos em um pedaço de papel ou quadro-negro que representam posições ou lugares com relação aos eixos – linha vertical e horizontal – de um gráfico. As coordenadas de um ponto dizem a você onde ele está em um gráfico.

Os eixos de um gráfico algébrico são, geralmente, nomeados com números inteiros, mas eles podem ser nomeados com qualquer número racional, desde que os números estejam a uma mesma distância um do outro, como, por exemplo, a distância de um quarto entre $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, ou $\frac{3}{4}$.

Os pontos que você coloca *no* gráfico não precisam ser números inteiros e podem não estar alinhados com os eixos, eles ocupar o espaço entre as linhas. Isso possibilita que representem qualquer número. De qualquer forma, os pontos nos espaços são apenas estimativas de números. Você pode dizer, a partir do gráfico, que um ponto está entre 2 e 3, mas você teria dificuldade em decidir se o ponto é 2,5 ou 2,6.

Ordenando pares, ou coordenando as coordenadas

Para, de fato, colocar um ponto em um gráfico, você precisa de informação sobre onde colocar o ponto. É aqui que os pares ordenados entram.



Um *par ordenado* é um conjunto de dois números chamados de *coordenadas*. Eles são escritos dentro dos parênteses e com uma vírgula para separá-los. Alguns exemplos são: (2,3), (-1,4), e (5,0). Essa notação em particular indica que a ordem é uma coisa importante: o primeiro número, *ou coordenada x*, diz a você a posição do ponto em relação ao eixo x – a distância para a esquerda ou para a direita a partir do ponto de origem – e o segundo número, *ou coordenada y,* diz a você a posição do ponto em relação ao eixo y – a distância para cima ou para baixo a partir do ponto de origem. Por exemplo, o ponto para o par ordenado (3,2) está a três unidades de medida para a direita do ponto de origem e duas marcas acima do eixo horizontal. Dê uma olhada na Figura 14-1 para ver onde os pontos estão segundo diversos pares ordenados.

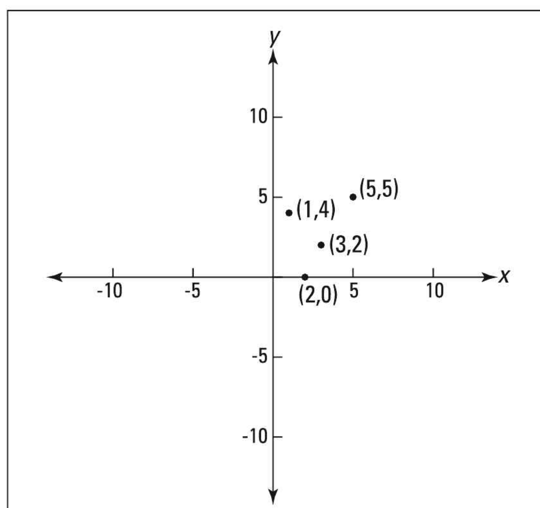


Figura 19-4: Coordenadas e seus pontos em um gráfico.

Tudo começa na *origem* – na interseção dos dois eixos. O par ordenado para a origem é (0,0). Os números nesse par ordenado dizem a você que o ponto não foi para a esquerda, direita, para cima ou para baixo. Sua posição está no local de início.



Note que o ponto (2,0) fica à direita do eixo *x*. Toda vez que o 0 for uma das coordenadas do par ordenado, então o ponto está localizado sobre um dos eixos.

A Tabela 19-1 mostra os nomes dos quadrantes, suas posições no plano cartesiano e as características dos pontos das coordenadas nos quadrantes.

Metade de um jogo de basquete

Tabela 19-1 Quadrantes

Quadrante	*Posição*	*Valores da coordenada*	*Como diagramar*
Quadrante I	lado superior direito	positivo, positivo	mova para direita e para cima
Quadrante II	lado superior esquerdo	negativo, positivo	mova para a esquerda e para cima
Quadrante III	lado inferior esquerdo	negativo, negativo	mova para a esquerda e para baixo
Quadrante IV	lado inferior direito	positivo, negativo	mova para a direita e para baixo
	Eixo da direita	positivo, 0	mova para a direita e desenhe em cima do eixo x
	Eixo da esquerda	negativo, 0	mova para a esquerda e desenhe em cima do eixo x
	Eixo de cima	0,positivo	mova para cima e desenhe em cima do eixo y
	Eixo de baixo	0,negativo	mova para baixo e desenhe em cima do eixo y

O desenho de gráficos no plano cartesiano envolve desenhar os pontos em suas posições corretas. Algumas vezes os pontos estão lá, sozinhos, como uma página não usada em um livro do tipo "ligar os pontos" de uma criança. Quando os pontos são conectados, eles, às vezes, formam linhas curvas no formato de U, ou até mesmo figuras mais emocionantes. Isso vai depender da equação a que o ponto se relaciona.

Desenhando os pontos na prática

Para desenhar um ponto, olhe para as coordenadas – os números nos parênteses. O primeiro número diz a você em qual direção seguir, horizontalmente, a partir da origem. Coloque o seu lápis na origem e mova para a direita se o primeiro número é positivo ou mova para a esquerda se o primeiro número é negativo. Em seguida, a partir dessa posição, mova o seu lápis para cima ou para baixo: para cima se o segundo número for positivo e para baixo se for negativo.

Os pontos a seguir estão desenhados na Figura 19-5. As letras servem de nomes para os pontos para que você possa comparar suas coordenadas.

A: (9,0)	B: (7,4)	C: (3,8)	D: (0,7)	E: (-2,2)
F: (-8,0)	G: (-5,-3)	H: (0,-3)	J: (3,-2)	K: (8,-7)

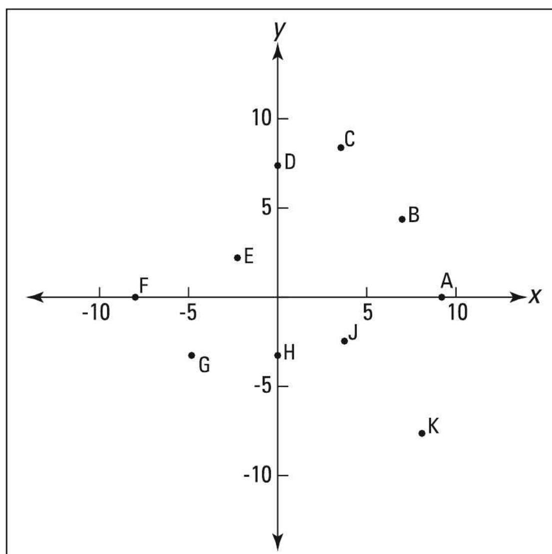


Figura 19-5: Os pontos de A até K desenhados em um plano cartesiano.

Desenhando uma linha

As linhas são uma das coisas mais básicas e mais úteis em um gráfico na álgebra. Você pode usá-las para representar a forma como sua renda flutua, a maneira como a distância a partir de um determinado ponto muda ou como uma parte de uma maquinaria pode se degradar. Assim, as linhas são úteis, e também são fáceis de lidar. O que mais você poderia querer?

Os pontos espalhados por todos os lados sem uma forma aparente, em geral, não significam nada. Na álgebra, é mais comum ver pontos organizados em uma equação, isso lhes confere algo em comum. O padrão mais simples é uma linha reta. Alinhe esses pontos!



Uma *linha* (linha reta) é o conjunto de todos os pontos em um gráfico que satisfaz uma equação linear.

Esses pontos estão desenhados na Figura 19-6: (-2,12), (-1,11), (0,10), (1,9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5), (6,4), (7,3), (8,2), (9,1), (10,0), (11,-1), (12,-2), (13,-3).

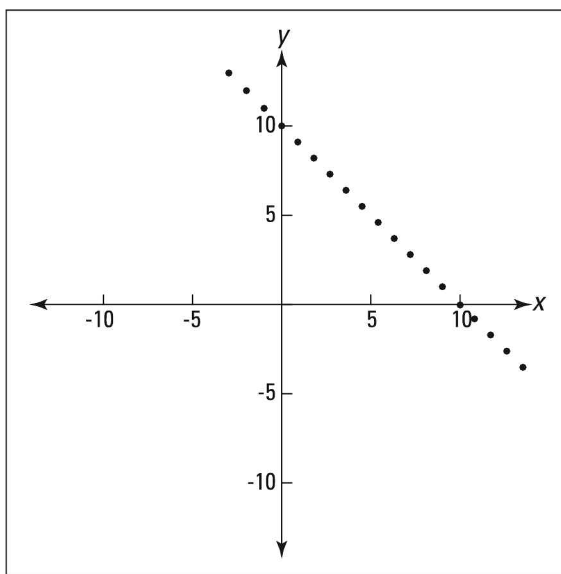


Figura 19-6: Pontos alinhados como turdus, todos em uma fila.

Ao invés de listar os milhões de pontos que parecem estar situados ao longo da mesma linha, você pode escrever uma equação que expressa a relação entre os pontos. Nesse caso, a relação é $x + y = 10$. As coordenadas em cada par somam 10. Mas o que o gráfico não mostra é que nem todos os pontos são inteiros – pontos do tipo $\left(1\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}\right)$ se enquadram no padrão e também estão situados na linha. Conectando todos os pontos para formar a linha, você inclui todas as frações entre os pontos.

Essa equação $x + y = 10$, diz que qualquer coisa que tenha a soma igual a10 te dá um ponto no gráfico. Isso inclui frações, decimais, positivos e negativos. O que antes era o primeiro de muitos pontos ou valores que funcionavam em uma equação é, agora, um número de pontos *infinitos*.

A Figura 19-7 mostra a você como os pontos se parecem quando são conectados para formar uma linha.

Para desenhar uma linha, você precisa de apenas dois pontos. Uma regra na geometria diz que apenas uma linha pode passar por dois pontos em particular. Mesmo que apenas dois pontos sejam necessários para desenhar uma linha, é uma boa idéia desenhar pelo menos três pontos para ter certeza que você desenhou a linha corretamente.



Ao desenhar gráficos, três pontos são bem melhores que dois. Se você coloca um de dois pontos no lugar errado em um gráfico, você provavelmente não vai notar que essa linha está errada. Contudo, se você coloca um dos três pontos no lugar errado, é mais fácil que você note que a sua linha não está reta. Desenhar três pontos é uma boa verificação.

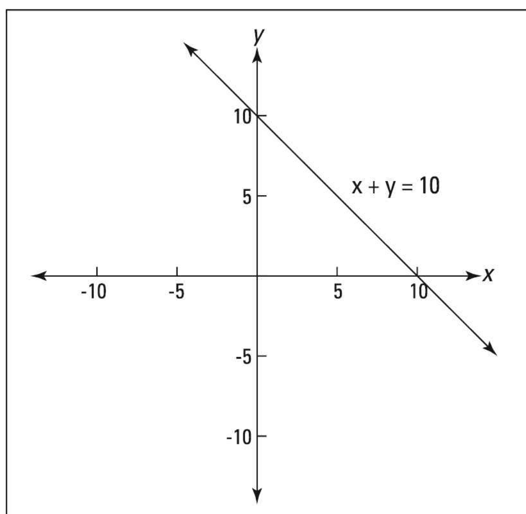


Figura 19-7: Conecte os pontos e tenha uma linha.

Desenhando a equação de uma linha



Uma equação cujo gráfico é uma linha reta é uma equação *linear*. A equação tem a forma padrão igual à $ax + by = c$, onde x e y são variáveis e a, b e c são números reais. A equação de uma linha geralmente tem um x ou um y – em muitos casos até ambos – que se referem a todos os pontos (x,y) que tornam a equação verdadeira. Tanto o x quanto o y têm a potência igual a um (se as potências fossem maiores ou menores, o gráfico seria curvo).

Ao desenhar uma linha, você pode encontrar alguns pares de números que tornam a equação verdadeira e, então, conectá-los. *Conecte os pontos!*

Com o que a equação da linha se parece? Ela se parece com os exemplos a seguir. Note que as primeiras três equações são escritas na forma padrão e que a quarta tem que ser resolvida em função de y. As duas últimas têm apenas uma variável, isso acontece com linhas horizontais e verticais.

$$x + y = 10 \qquad 2x + 3y = 4$$

$$-5x + y = 7 \qquad y = \frac{1}{2}x + 3$$

$$x = 3 \qquad y = -2$$



Toda vez que você tiver uma equação onde y é igual a um número, então você tem uma linha horizontal passando por todos esses valores de y. Por outro lado, se você tem uma equação onde x é igual a um número, todos os valores de x são os mesmos, e você tem uma linha vertical. Todas as linhas horizontais são paralelas ao eixo x. Suas equações se parecem com $y = 3$ ou $y = -2$. Todas as linhas verticais são paralelas ao eixo y. Suas equações se parecem com $x = 5$ ou $x = -11$. A Figura 19-8 é um gráfico de $y = 4$, usando quatro pontos: (-4,4), (0,4), (1,4) e (3,4).

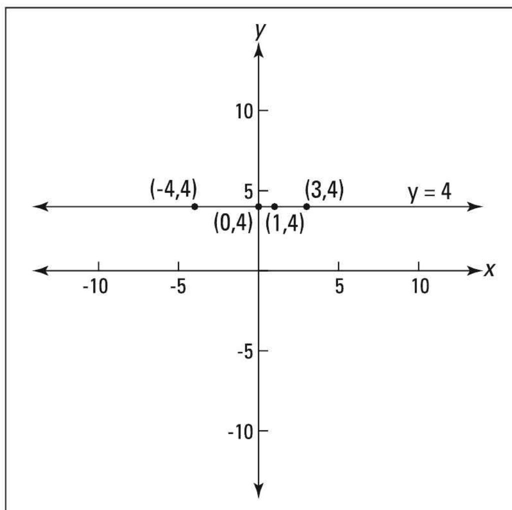


Figura 19-8: Linhas horizontais são paralelas ao eixo x.

Encontre um ponto na linha $x - y = 3$ usando os passos a seguir.

1. **Escolha um valor aleatório para uma das variáveis, ou x ou y.**

   Ao encontrar os pontos que se encaixam na linha $x - y = 3$, você pode deixar $x = 8$, então $8 - y = 3$.

2. **Resolva a equação para achar o valor da outra variável.**

   Subtraia 8 de cada lado para ter $-y = -5$

   Multiplique cada lado por -1 para ter $y = 5$.

   Lembre-se que você pode mudar a aparência da equação sem mudar o desenho da linha. Para isso basta multiplicar ou dividir cada lado por -1.

   (Para uma revisão sobre como resolver equações lineares, volte ao Capítulo 12).

3. **Escreva um par ordenado para as coordenadas do ponto.**
   Assim, o seu primeiro par ordenado é (8,5).

Você encontra mais pares ordenados escolhendo outro número para substituir x ou y.

Para mais um desafio, encontre os pontos que estão na linha $2x + 3y = 12$. Os multiplicadores (2 e 3) tornam esse desafio um pouco mais difícil. Talvez você encontre um ou dois pontos muito facilmente, mas outros podem ser mais difíceis, por causa das frações. Um bom plano para um caso como esse é resolver em função de x ou de y e, então, encaixar os números, como mostram esses passos:

1. **Resolva a equação em função de uma das variáveis.**

   Resolvendo em função de y no exemplo $2x + 3y = 12$ você tem:

$$3y = 12 - 2x$$
$$y = \frac{12 - 2x}{3}$$

Com multiplicadores envolvidos, você acaba tendo uma fração.



2. **Escolha um valor para a outra variável e resolva a equação.**

   Tente escolher valores para que o numerador seja divisível pelo multiplicador da primeira variável.

   No exemplo, 3 é o multiplicador de y, então deixe $x = 3$. Resolvendo a equação,

   $$y = \frac{12 - 2 \cdot 3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Encontrar os pontos que estão na linha $x = 4$ com apenas um x aparecendo na equação talvez aparente ser uma tarefa difícil, mas isso, na verdade, torna tudo mais fácil. Você pode escrever qualquer coisa para o valor de y, desde que x seja igual a 4.

Alguns pontos são: (4,9), (4,-2), (4,0), (4,3,16), (4,-11), (4,4).



Note que o 4 é sempre o primeiro número. O ponto (4,9) não é o mesmo que o ponto (9,4). Lembre-se que a ordem é importante em pares ordenados.

Desenhando esses pontos você tem uma linha vertical legal, como mostra a Figura 19-9. Se todas as coordenadas y são o mesmo ponto, a linha será – como você pode supor – horizontal.

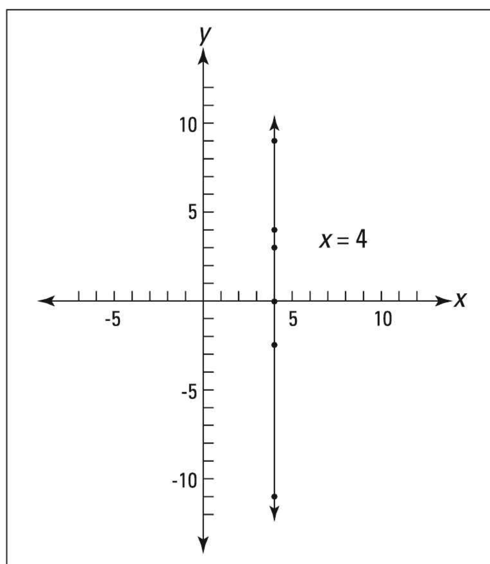


Figura 19-9: Quando todas as coordenadas x são as mesmas, você tem uma linha vertical.

Investigando interseções

A *interseção* de uma linha é um ponto onde a linha cruza um eixo. A menos que a linha seja vertical ou horizontal, ela cruza ambos os eixos x e y, desta forma, existem duas interseções – uma no eixo x e uma no eixo y. Linhas horizontais têm apenas interseções no eixo dos y e linhas verticais apenas no eixo dos x. As exceções acontecem quando a linha horizontal é, geralmente, o eixo x ou a linha vertical é o eixo y.

Interseções são rápidas e fáceis de encontrar, e podem ser uma grande ajuda ao desenhar um gráfico. A razão para isso é que uma das coordenadas de cada interseção é zero. Os zeros em equações diminuem os números e o trabalho, e é bom tirar vantagem disso quando você puder.



A interseção em x de uma linha acontece quando a linha cruza o eixo x. Para encontrar a interseção em x, deixe que o y da equação seja igual a zero e resolva em função de x.

- Para encontrar a interseção em x da linha $4x - 7y = 8$, deixe que seja $y = 0$ na equação.

  Então $4x - 0 = 8$, $4x = 8$, e $x = 2$.

  A interseção em x da linha é (2,0): a linha passa pelo eixo x nesse ponto.



A interseção em y de uma linha é quando a linha cruza o eixo y. Para encontrar a interseção em y, deixe que o x da equação seja igual a zero e resolva em função de y.

- Encontre a interseção em y da linha $3x - 7y = 28$

  Deixe $x = 0$ na equação.

  Então $0 - 7y = 28$, $-7y = 28$, e $y = -4$.

  A interseção em y da linha é (0,- 4).

Desde que você tenha cuidado ao desenhar as interseções em x e em y em um gráfico e coloque os pontos nos eixos corretos, eles serão, na maioria das vezes, tudo o que você precisa para desenhar uma linha.

Observando a inclinação

A *inclinação* de uma linha é o número que descreve o declive e a direção do desenho dessa linha. A inclinação é um número positivo se a linha move para cima da esquerda para a direita. A inclinação é negativa se a linha move para baixo da direita para a esquerda. Quanto mais inclinada é a linha, maior é o valor absoluto da inclinação (mais longe está o número de zero).

Saber antecipadamente a inclinação de uma linha ajuda você a desenhá-la. Você pode encontrar um ponto na linha e então usar a inclinação para

desenhá-la. Uma linha com uma inclinação de 6 sobe acentuadamente. Se você sabe como a linha deve se parecer na medida em que sobe e desce – informação que você obtém a partir da inclinação – é mais fácil desenhar a linha corretamente.

O valor da inclinação é importante quando a equação da linha é usada em situações de modelagem. Por exemplo, em equações representando o custo de muitos itens, o valor da inclinação é chamado de *custo marginal.* Em equações representando depreciação, a inclinação é chamada de *depreciação anual.*

A Figura 19-10 mostra algumas linhas com suas inclinações. Todas as linhas passam pela origem apenas por conveniência.

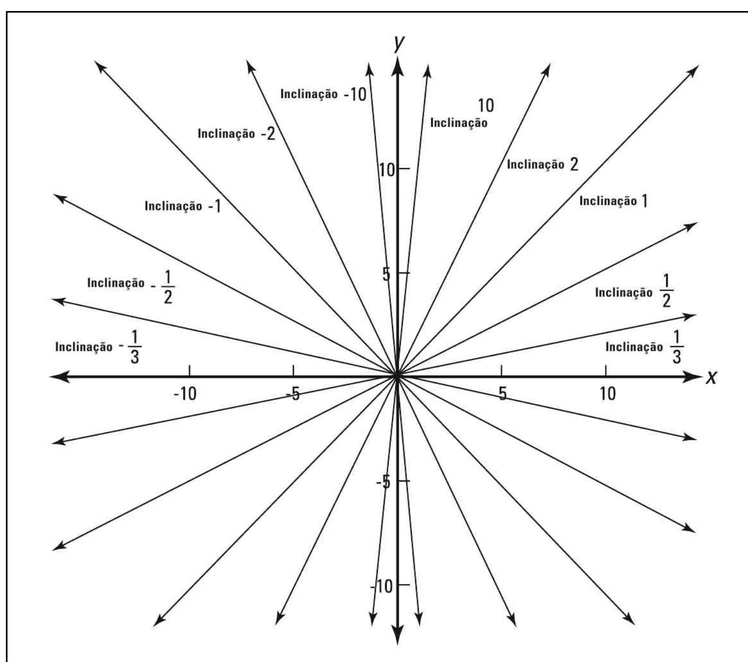


Figura 19-10: Escolha uma linha – veja a sua inclinação.

E uma linha horizontal – uma que não sobe e nem desce?

Uma linha horizontal tem uma inclinação igual à zero. Uma linha vertical não tem inclinação, a inclinação é indefinida.

A Figura 19-11 mostra gráficos de linhas que têm uma inclinação igual à zero ou uma inclinação indefinida.

Uma maneira de se referir à inclinação, quando ela é escrita na forma de fração, é *rise over run* ("aumento sobre a distância"). Se a inclinação é de $\frac{3}{2}$, isso significa que para cada 2 unidades que a linha *corre* ao longo do eixo x, ela aumenta em 3 unidades ao longo do eixo y. Uma inclinação de $\frac{-1}{8}$ indica que a linha corre 8 unidades horizontalmente, paralela ao eixo x, e cai (aumento negativo) em 1 unidade verticalmente.

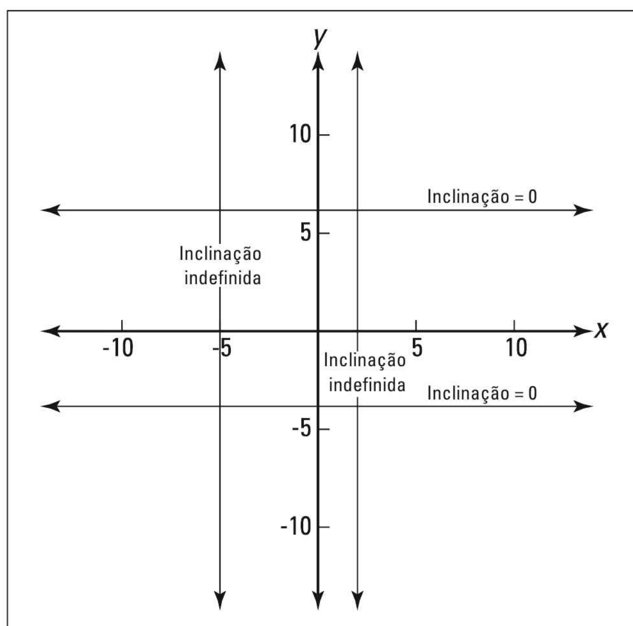


Figura 19-11: Linhas horizontais têm uma inclinação igual à zero. Linhas verticais têm uma inclinação indefinida.

Formulando a inclinação (coeficiente da reta)

Se você conhece dois pontos da linha, você pode calcular o número que representa a inclinação da linha.



A inclinação de uma linha, simbolizada pela pequena letra m, é encontrada quando você conhece as coordenadas de dois pontos da linha, (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Subscritos são usados nesses casos para identificar qual é o primeiro ponto e qual é o segundo ponto. Não há regra para qual é qual; você pode identificá-los da maneira que desejar. Parece apenas uma boa idéia identificá-los para manter as coisas em ordem.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Isso será a mesma inclinação se você subtrair na ordem oposta

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Você só não pode misturá-los e fazer $(x_1 - y_2)$ sobre $(x_2 - y_1)$.

Agora, você pode tentar com os problemas a seguir.

- Encontre a inclinação da linha que passa por (3,4) e (2,10).

  Faça que (3,4) seja (x_1,y_1) e (2,10) seja (x_2,y_2).

  Substitua na fórmula:

  $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{10 - 4}{2 - 3}$$

  Simplifique: $m = \frac{6}{-1} = -6$

  Essa linha fica muito inclinada à medida que cai da esquerda para a direita.

- Encontre a inclinação da linha que passa por (4,2) e (-6,2).

  Deixe que (4,2) seja (x_1,y_1) e (-6,2) seja (x_2,y_2).

  Substitua na fórmula:

  $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{2 - 2}{-6 - 4}$$

  Simplifique: $m = \frac{0}{-10} = 0$

  Ambos os pontos estão duas unidades acima do eixo x e formam uma linha horizontal. É por isso que a inclinação é 0.

- Encontre a inclinação da linha que passa por (2,4) e (2,-6).

  Deixe que (2,4) seja (x_1,y_1) e (2,-6) seja (x_2,y_2).

  Substitua na fórmula:

  $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{-6 - 4}{2 - 2}$$

  Simplifique: $m = \frac{-10}{0}$

Opa! Você não pode dividir por zero. Não existe esse tipo de operação. A inclinação não existe ou é *indefinida*. Esses dois pontos estão em uma linha vertical.



Tome cuidado com esses dois erros comuns ao trabalhar com a fórmula da inclinação (coeficiente da reta):

- Tenha certeza de subtrair os valores de *y* no *topo* da fórmula da divisão. Um erro comum é subtrair os valores de *x* no topo.
- Tenha certeza de manter os números na mesma ordem quando você subtrai. Decida os pontos que estarão em primeiro e em segundo lugar. Depois pegue o segundo *y* e diminua do primeiro *y* e o segundo *x* menos o primeiro *x*. Não faça o topo em uma ordem diferente da parte de baixo.

Combinando a inclinação e a interseção

Uma equação de uma única linha pode tomar várias fórmulas. Assim como você pode resolver em função de uma variável ou outra em uma fórmula, você pode resolver para uma das variáveis na equação da linha. Essa "informação instantânea" pode ajudar você a encontrar os pontos para desenhar a linha ou encontrar a inclinação da linha.

Uma forma comum e popular da equação de uma linha é a forma da interseção da inclinação. É chamada assim porque a inclinação e a interseção em y da reta estão óbvias ao olhar. Quando uma linha é escrita como $6x + 3y = 5$, você pode encontrar pontos substituindo x ou y por números e resolver em função da outra coordenada. Usando métodos pra resolver equações lineares (Capítulo 12), a mesma equação pode ser escrita como $y = -2x + \frac{5}{3}$, que diz a você que a inclinação é -2 e o lugar que a linha cruza o eixo y (interseção em y) é $\left(0, \frac{5}{3}\right)$.



Onde y e x representam pontos na linha, m é a inclinação da linha e b é a interseção em y da linha. A forma da interseção da inclinação é

$$y = mx + b$$

Em cada um desses casos, a equação é escrita na forma da interseção da inclinação. O coeficiente de x é a inclinação da linha e a constante é a interseção em y.

- $y = 2x + 3$: a inclinação é 2; a interseção em y é (0,3).
- $y = \frac{1}{3}x - 2$: a inclinação é $\frac{1}{3}$; a interseção em y é (0,-2).
- $y = 7$: a inclinação é 0; a interseção em y é (0,7). Você pode ler essa equação como sendo $y = 0 \cdot x + 7$.

Chegando à forma da inclinação-interseção (equação da reta na forma reduzida)

Se a equação da linha não está na forma da interseção da inclinação, resolver em função de y pode mudar a equação para a forma da inclinação-interseção. Os passos a seguir mostram como fazer.

Coloque a equação $5x - 2y = 10$ na forma da interseção da inclinação.

1. **Coloque o termo com o y sozinho do lado esquerdo.**

   Subtraia $5x$ de cada lado para ter o termo com o y sozinho: $-2y = -5x + 10$

2. **Resolva em função de y.**

   Divida cada lado por -2 e simplifique os dois termos da direita.

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{(-5x + 10)}{-2}$$

$$y = \frac{-5x}{-2} + \frac{10}{-2}$$

$$y = \frac{5}{2}x - 5$$

A inclinação é $\frac{5}{2}$ e a interseção em y é em (0,-5).

Desenhando a partir da inclinação-interseção

Uma vantagem de ter uma equação de reta na forma da inclinação- interseção (forma reduzida) é que desenhar a linha pode ser uma tarefa bastante rápida, como os exemplos a seguir mostram.

- Desenhe no gráfico $y = \frac{3}{2}x + 1$

  A inclinação dessa linha é $\frac{3}{2}$. e a interseção em y é o ponto (0,1). Primeiro desenhe a interseção em *y* (Veja a Figura 19-12).

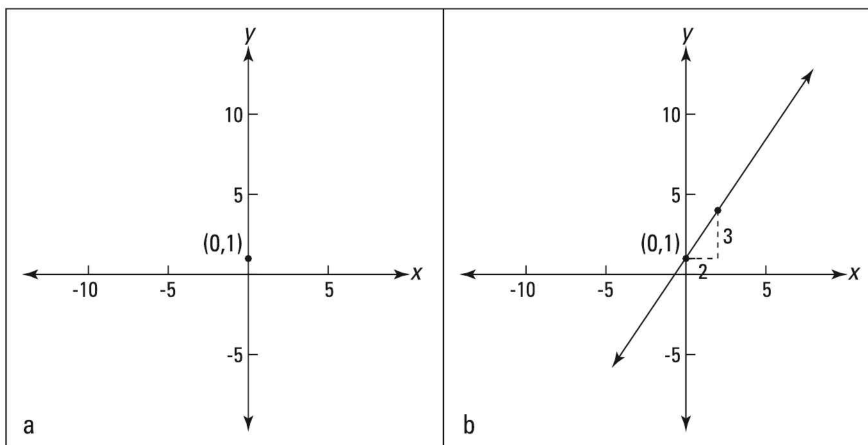


Figura 19-12: A interseção em y está localizada, use o aumento sobre a distância para encontrar outro ponto.

Depois use a interpretação do *aumento sobre a distância* da inclinação para contar os espaços de um a outro ponto na linha. Para tal, faça o movimento da corrida, ou da parte de baixo, primeiro. Nesse esboço, mova 2 unidades para a direita de (0,1). Daí, aumente ou suba 3 unidades, que devem te levar a (2,4).

É mais ou menos como ir em busca de um tesouro: "Dois passos para leste; três passos para o norte, agora cave!". O nosso "cave!" significa que você deve colocar um ponto ali e conectar esse ponto com o ponto de partida – a interseção. Olhe para o lado direito (o lado b) da Figura 19-12 para ver como isso é feito.

Essa é uma maneira rápida e fácil de esboçar uma linha.

- Desenhe $y = -3x + 2$

  Primeiro, desenhe a interseção em *y* (0,2).

  Pense na inclinação -3 como sendo a fração $\frac{-3}{1}$. Dessa maneira você tem uma *distância* de 1. O *aumento* não é um aumento nesse caso, o 3 é negativo, então é uma queda. Conecte a interseção (0,2) com o ponto que você encontra movendo 1 unidade para a direita e 3 unidades para baixo, o que deve ser (1,-1).

A Figura 19-13 mostra a linha $y = -3x + 2$ que tem uma inclinação de -3.

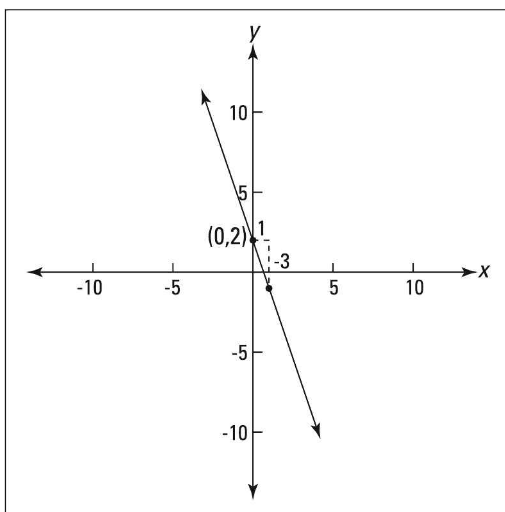


Figura 19-13: O gráfico de $y = -3x + 2$.

Fazendo linhas paralelas e perpendiculares

A inclinação da linha informa sobre uma característica particular de uma linha. Ela diz se é inclinada ou horizontal e se está subindo ou descendo à medida que você lê da esquerda para a direita. A inclinação de uma linha também pode te dizer se uma ela é paralela ou perpendicular a outra linha. A Figura 19-14 mostra linhas paralelas e perpendiculares.

Linhas *paralelas* nunca se tocam. Elas estão sempre à mesma distância uma da outra e nunca compartilham um ponto em comum. Elas têm a mesma inclinação.

Linhas *perpendiculares* formam um ângulo de 90 graus (ângulo reto) quando se cruzam. Elas têm inclinações que são recíprocos negativos uma da outra. Os eixos *x* e *y* são linhas perpendiculares.

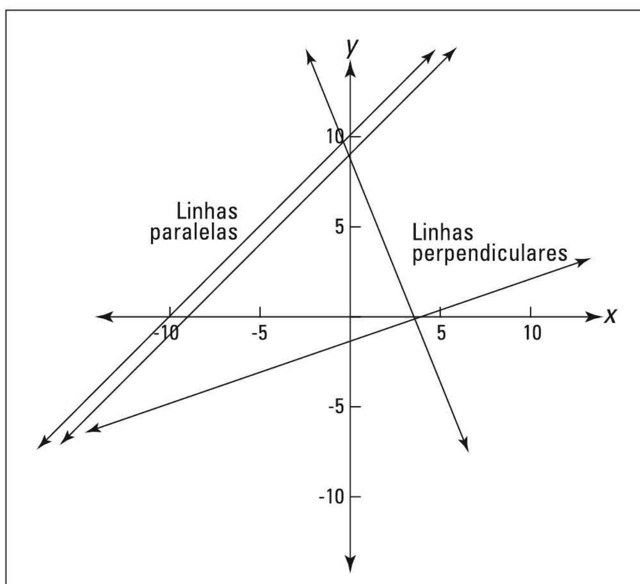


Figura 19-14: Linhas paralelas são como estradas de ferro, linhas perpendiculares se encontram em ângulos retos.



Dois números são recíprocos se seu produto é o número 1. Os números $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ são recíprocos. Dois números são recíprocos negativos se o produto deles é o número -1. Os números $\frac{3}{4}$ e $-\frac{4}{3}$ são recíprocos negativos.



Se a linha ℓ_1 tem uma inclinação igual a m_1, e a linha ℓ_2 tem uma inclinação igual a m_2, então as linhas serão *paralelas* se $m_1 = m_2$.

Se a linha ℓ_1 tem uma inclinação igual a m_1, e a linha ℓ_2 tem uma inclinação igual a m2, então as linhas serão *perpendiculares* se $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Os exemplos a seguir mostram como determinar se as linhas são paralelas ou perpendiculares penas olhando para suas inclinações.

- A linha $y = 3x + 2$ é paralela à linha $y = 3x - 7$ porque ambas as inclinações são 3.
- A linha $y = \frac{-1}{4}x + 3$ é paralela à linha $y = -\frac{1}{4}x + 1$ porque ambas as inclinações são $\frac{-1}{4}$.
- A linha $3x + 2y = 8$ é paralela à linha $6x + 4y = 7$ porque ambas as inclinações são $\frac{-3}{2}$. Escreva cada linha na forma do aumento sobre a distância para ver isso.

  $3x + 2y = 8$ pode ser escrita como $2y = -3x + 8$ ou $y = \frac{-3}{2}x + 4$.

  $6x + 4y = 7$ pode ser escrita como $4y = -6x + 7$ ou $y = \frac{-3}{2}x + \frac{7}{4}$.
- A linha $y = \frac{3}{4}x + 5$ é perpendicular à linha $y = \frac{-4}{3}x + 6$ porque suas inclinações são recíprocos negativos.
- A linha $y = -3x + 4$ é perpendicular à linha $y = \frac{1}{3}x - 8$ porque suas inclinações são recíprocos negativos.

Cruzando linhas

Se duas linhas se *interceptam* ou se cruzam, elas fazem isso exatamente uma vez, e apenas uma. O lugar em que elas se cruzam é chamado de *ponto de interseção* e esse ponto em comum é o único que as duas linhas compartilham. Um desenho cauteloso pode, algumas vezes, ajudar você a encontrar o ponto de interseção.

O ponto (5,1) é o ponto de interseção de duas linhas $x + y = 6$ e $2x - y = 9$ porque as coordenadas tornam cada equação verdadeira:

1. **Se $x + y = 6$, então substituindo os valores $x = 5$ e $y = 1$ dão $5 + 1 = 6$, que é verdadeira.**
2. **Se $2x - y = 9$, 1.então subtraindo os valores $x = 5$ e $y = 1$ dão $2 \cdot 5 - 1 = 10 - 1 = 9$, que também é verdadeira.**
3. **Esse é o único ponto que funciona nas duas linhas.**

Desenhando em relação às interseções

Um desenho cauteloso pode dar a interseção de duas linhas. O único problema é que se o seu desenho estiver um pouquinho desalinhado, você pode ter a resposta errada. E, também, se a resposta tem uma fração, é difícil descobrir qual é essa fração. Os exemplos a seguir podem ajudar você a entender isso melhor.

- Encontre a interseção das linhas $3x - y = 5$ e $x + y = -1$.

  Olhe os desenhos da Figura 19-15.

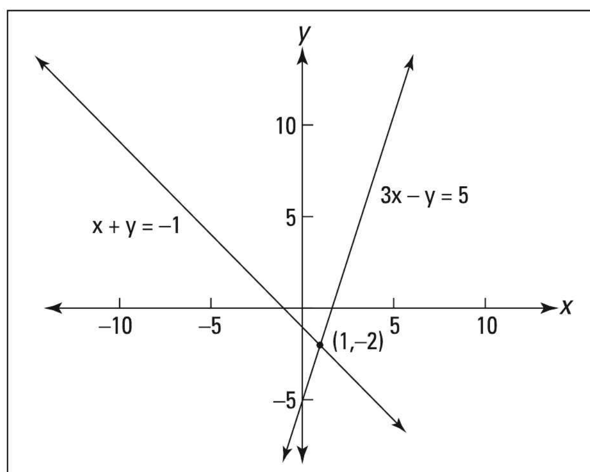


Figura 19-15: A interseçã de duas linhas no ponto (1,-2).

As linhas parecem se cortar no ponto (1,-2). Substitua as coordenadas nas equações para verificar.

Se $3x - y = 5$, então substituindo os valores você tem $3 \cdot 1 - (-2) = 3 + 2 = 5$, que é verdadeiro.

Se $x + y = -1$, então substituindo os valores você tem $1 + (-2) = -1$, que também é verdadeiro.

Desenhar um gráfico é uma maneira exata de descobrir as interseções das linhas. Você precisa ser muito cuidadoso ao desenhar os pontos e as linhas.

Substituindo para achar interseções

Outra maneira de encontrar o ponto onde duas linhas se cruzam é usar uma técnica chamada substituição – você substitui o valor de y de uma equação pelo valor de y da outra equação e resolve em função de x. Visto que você está procurando o lugar onde o x e o y de cada linha são os mesmos – exatamente onde eles se cruzam – então você pode escrever a equação y = y, que significa que o y da primeira linha é igual ao y da segunda linha. Substitua os y ao valor a que eles são iguais em cada equação e ache o valor de x que funcione.

Encontre a interseção das linhas $3x - y = 5$ e $x + y = -1$. (esse é o mesmo problema desenhado no tópico anterior).

1. **Coloque cada equação na forma do aumento sobre a distância, que é a maneira de resolver cada equação em função de *y*.**

   $3x - y = 5$ pode ser escrita como $y = 3x - 5$

   $x + y = -1$ pode ser escrita como $y = -x - 1$.

   As linhas não são paralelas, e suas inclinações são diferentes, então haverá um ponto de interseção.

2. **Iguale os pontos *y* e resolva.**

   $y = 3x - 5$ e $y = -x - 1$.

   Substitua ao valor que *y* é igual na primeira equação pelo valor que *y* é igual na segunda equação:

   $3x - 5 = -x - 1$.

3. **Ache o valor de *x*.**

   Some *x* de cada lado e some 5 em cada lado.

   $3x + x - 5 + 5 = -x + x - 1 + 5$.

   $4x = 4$

   $x = 1$

Substitua o número 1 em qualquer uma das equações para achar que $y = -2$. As linhas se cruzam no ponto (1,-2).

Essa é a forma de encontrar a solução mesmo sem fazer o desenho gráfico. Se as linhas são paralelas, você pode identificá-las imediatamente, pois as inclinações são iguais. Se esse for o caso, não há solução. E, também, se as duas equações são apenas duas maneiras de nomear a mesma linha, você também perceberá imediatamente. As equações serão exatamente as mesmas na forma da inclinação-interseção.

Enroscando-se com as parábolas

As *parábolas* são curvas legais e no formato de U. Elas são o desenho do conjunto de expressões quadráticas iguais a y. Imagine um cabo pesado pendurado entre torres de uma ponte suspensa, a curva em forma de U seria uma parábola. Os refletores dos faróis têm curvas no formato de parábolas dentro deles. Os arcos da Mcdonalds são parábolas. A abundância de parábolas encontradas por aí aponta para o fato que as propriedades responsáveis por criar parábolas geralmente ocorrem naturalmente.

Matemáticos conseguiram criar uma equação para esse fenômeno natural.

As parábolas têm um ponto máximo ou um ponto mínimo chamado de vértice. A curva será mais baixa na esquerda e na direita de um vértice que será seu ponto máximo, e maior para a esquerda e para a direita de um vértice que será seu ponto mínimo.

Testando a parábola básica

Meu nome favorito para a parábola com a equação $y = x^2$ é a *parábola básica*. A Figura 19-16 mostra o gráfico dessa fórmula. Essa equação diz que a coordenada y de qualquer ponto na parábola é o quadrado da coordenada x. Note que se x é positivo ou negativo, o y é o quadrado disso e é positivo.

O vértice da parábola na Figura 19-16 está na origem (0,0), e sua curva é para cima. Você pode fazer essa parábola mais inclinada ou plana multiplicando x^2 por certo número. Se você multiplica por números maiores do que um, a parábola fica mais inclinada. Se você multiplica por números entre zero e um (frações próprias), a parábola fica mais plana como mostra a Figura 19-17. Fazê-la ficar mais inclinada ou mais plana em relação a parábola básica ajuda no enquadramento para aplicações diferentes. As mais planas são mais parecidas com a curva de um farol refletor. As mais inclinadas podem ser modelos para o tempo que se leva para nadar certa distância, dependendo da idade.

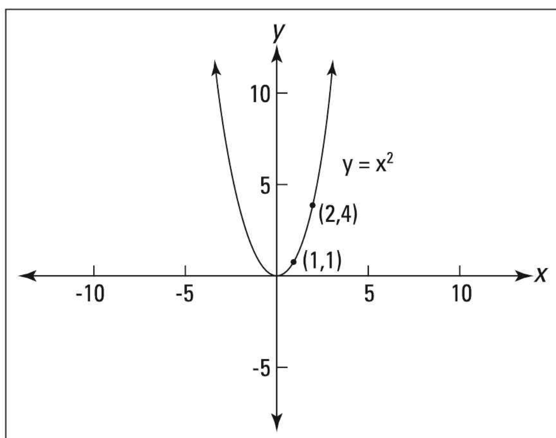


Figura 19-16: A parábola mais simples, $y = x^2$.

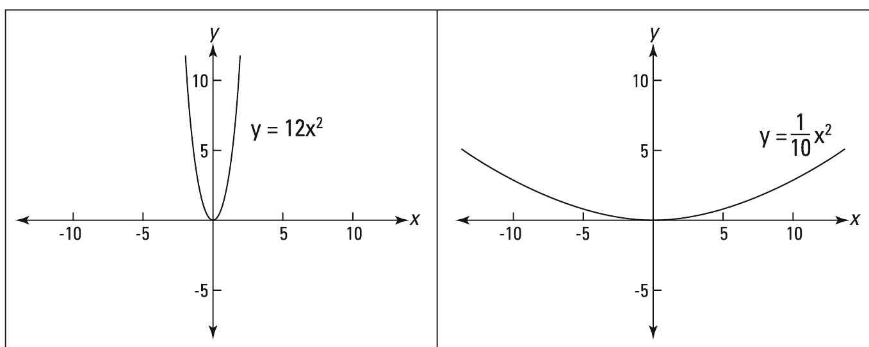


Figura 19-17: Uma parábola mais inclinada e uma mais plana.

Você pode fazer a parábola aberta para baixo multiplicando o x^2 por um número negativo, e fazê-la mais inclinada ou plana do que a parábola básica – em uma direção decrescente.

Colocando o vértice em um eixo

A parábola básica, $y = x^2$, pode ser deslizada para esquerda, direita, para cima ou para baixo, se colocarmos o vértice em algum outro lugar no eixo e não mudarmos o formato geral.

Se você muda a equação básica ao somar um número ao x^2, como: $y = x^2 + 3$, $y = x^2 + 8$, $y = x^2 - 5$, $y = x^2 - 1$, então a parábola se move para cima ou para baixo do eixo y. Note que somando um número negativo também faz parte do jogo. Essas manipulações ajudam a parábola se encaixar no modelo de uma determinada situação. Nem tudo começa no zero. A Figura 19-18 mostra inúmeras parábolas, apenas uma delas começa no zero.

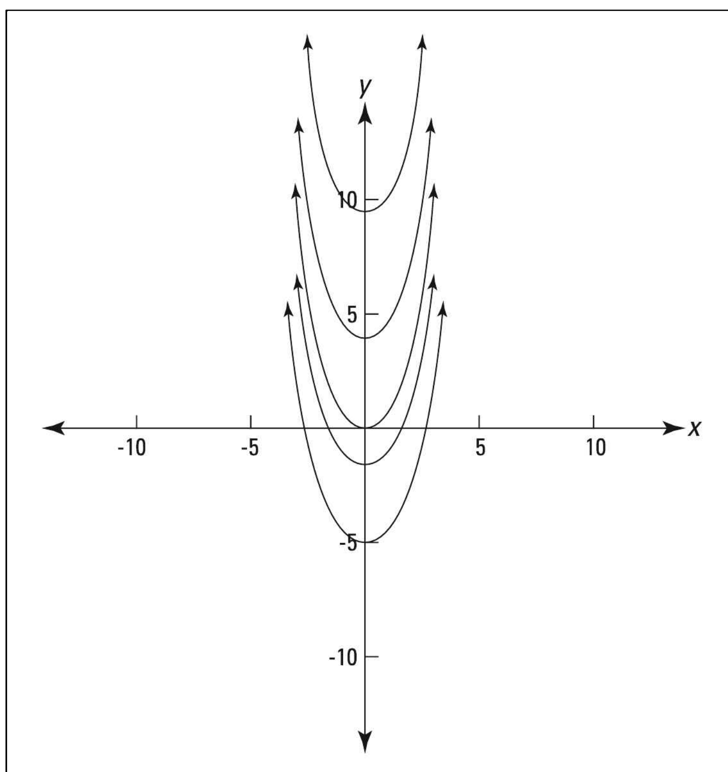


Figura 19-18: Parábolas no formato de colher.

Se você muda a equação somando um número primeiro ao x e depois elevando a expressão ao quadrado, como $y = (x + 3)^2$, $y = (x + 8)^2$, $y = (x - 5)^2$, ou $y = (x - 1)^2$, você move o gráfico para a esquerda ou para a direita de onde está a parábola básica. Usando um +3 como na equação $y = (x + 3)^2$ move o gráfico para a esquerda, e usando um -3 como na equação $y = (x - 3)^2$ move o gráfico para a direita. É o oposto do que você pode esperar, mas funciona exatamente dessa maneira. Veja a Figura 19-19 mais a frente.

Deslizando e multiplicando

Você pode combinar as duas operações para mudar o declive da parábola e mover o vértice. Isso muda a parábola original para atender a seus objetivos.

A equação usada para exemplificar uma situação pode requerer uma parábola inclinada porque as mudanças acontecem rapidamente, e isso pode requerer que o ponto de partida esteja a oito metros, e não a zero metros. Ao mover a parábola e mudar o formato, você pode ter uma melhor adaptação do que você quer demonstrar.

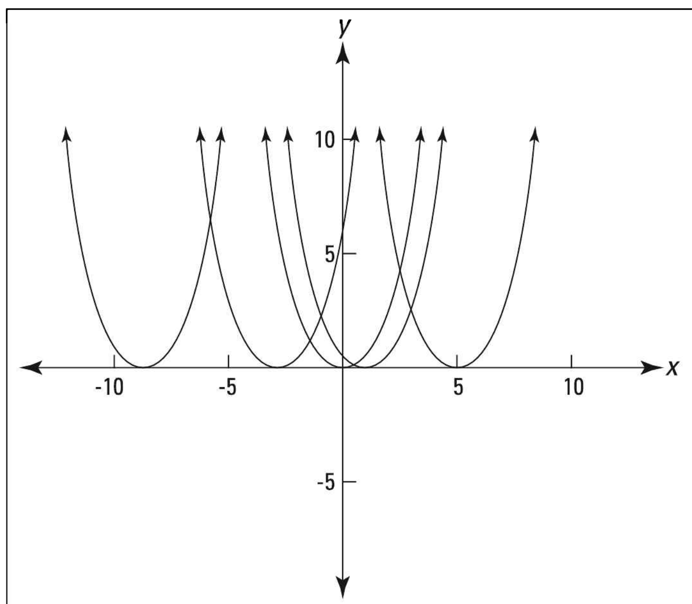


Figura 19-19: Todas as parábolas, seguidas uma das outras.

As equações a seguir e seus gráficos são mostrados na Figura 19-20.

$y = 3x^2 - 2$: o número 3 multiplicando o x^2 torna a parábola mais inclinada e o número -2 move o vértice para baixo no ponto (0,-2).

$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$: torna a parábola mais plana e move o vértice para cima no ponto (0,1).

$y = -5x^2 + 3$: torna a parábola mais inclinada, na direção decrescente, e move o vértice para (0,3).

$y = 2(x - 1)^2$: torna a parábola mais inclinada e move o vértice para a direita até o ponto (1,0).

$y = -\frac{1}{3}(x + 4)^2$: torna a parábola mais plana, na direção decrescente, e move o vértice para esquerda até o ponto (-4,0).

$y = -\frac{1}{20}x^2 + 5$: torna a parábola mais plana, na direção decrescente, e move o vértice para o ponto (0,5).

Criando a forma geral para a parábola

A equação mais geral para a parábola, que leva em conta todas as coisas que podem ser feitas, é

$$y = a(x - h)^2 + k$$

Essa é uma maneira padrão de escrever a equação de uma parábola para que ela te ofereça todas as informações que você precisa para desenhá-la. Se a equação está nessa forma, então os valores de *a, h* e *k* contam a história. Eles indicam como a parábola em questão se diferencia da parábola básica.

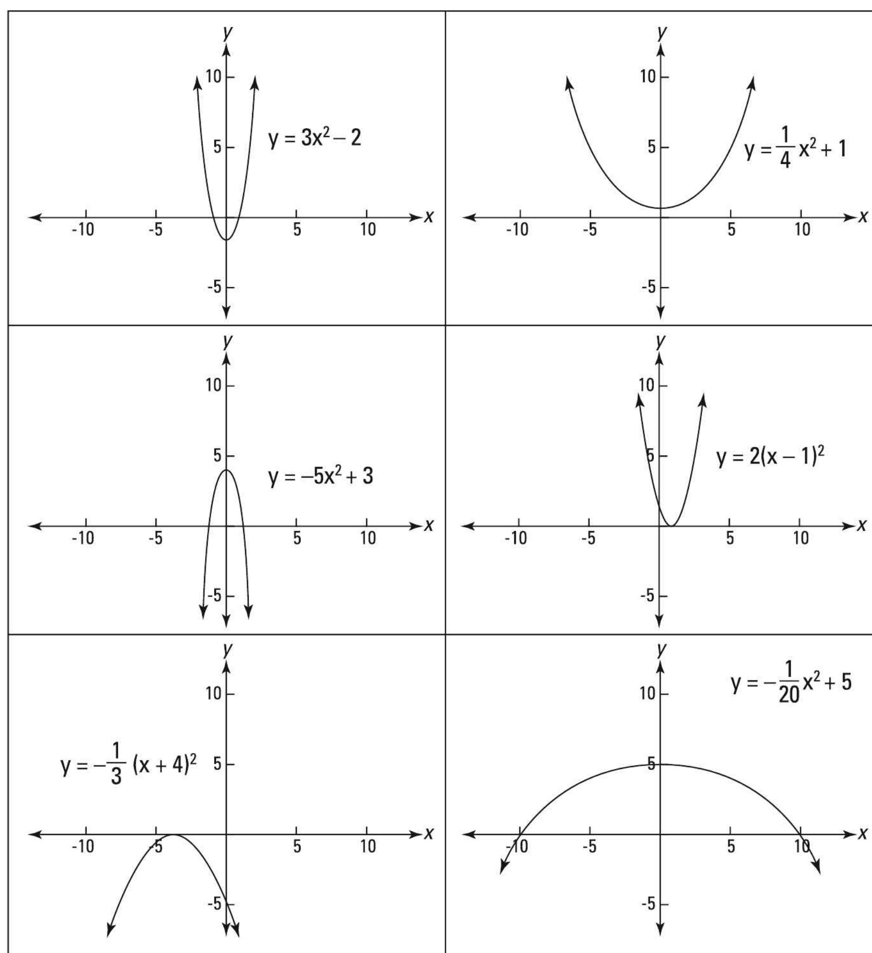


Figura 19-20: Parábolas em grande número.

- O fator *a* torna a parábola mais inclinada ou plana, e torna a parábola aberta para cima quando positivo e para baixo quando negativo.
- A letra *h* mostra a distância que o vértice se move para a esquerda ou para a direita (+*h* vai para esquerda, -*h* vai para direita).
- A letra *k* mostra a distância que o vértice se move para cima ou para baixo.

Os exemplos a seguir mostram como tudo isso se encaixa. Comece com os valores de *h* e *k*, que mostram as coordenadas do vértice. Depois considere o declive e a planura e se a abertura é para cima ou para baixo.

- $y = (x - 3)^2 + 2$

  O vértice dessa parábola é de 3 unidades para a direita da origem e 2 unidades para cima, assim ela fica no ponto (3,2). A parábola tem a abertura para cima, como mostra a Figura 19-21.

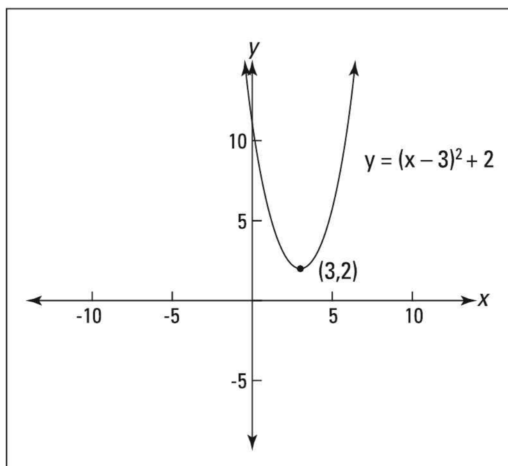


Figura 19-21: A parábola $y = (x - 3)^2 + 2$

- $y = \frac{-1}{4}(x + 1)^2 + 3$

  O vértice dessa parábola é de 1 unidade para a esquerda da origem e de 3 unidades para cima. A parábola tem abertura para baixo e é mais "plana", como mostra a Figura 19-22.

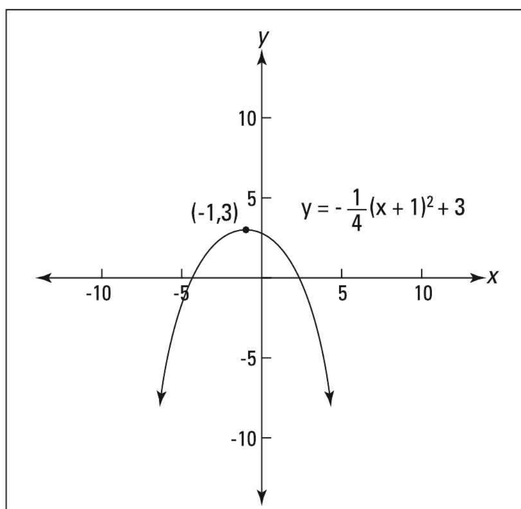
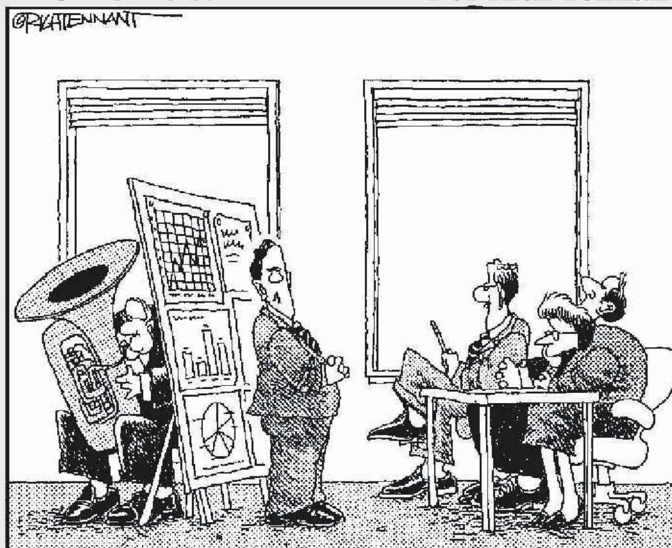


Figura 19-22: A parábola $y = \frac{-1}{4}(x + 1)^2 + 3$

Parte V

A parte dos "dez"

A 5ª onda **Por Rich Tennant**



"Preparem-se, eu acho que eles estão começando a se distrair".

Nesta parte...

Os dez erros mais comuns, as dez maneiras de fatorar uma equação quadrada, as dez regras da divisibilidade, dez passos para resolver um problema, os dez mandamentos. Ops! Como esse último item veio parar aqui?

As partes de dez oferecem referências rápidas e concisas para ajudar você a se organizar e proceder corretamente.

Capítulo 20

Os dez erros mais comuns

Neste capítulo:

- Deixando a parte do meio
- Distribuindo de maneira exata por cada termo
- Subtrair um termo é o mesmo que um número negativo
- Multiplicando expoentes com a mesma base
- Reduzindo frações (e isso não é uma nova dieta)

Muita álgebra é feita no mundo: quase todo mundo que vai além do curso primário tem aula de álgebra, então, simplesmente pelo número de pessoas que usam a álgebra podemos deduzir, também, que um grande número de erros é cometido. Esquecer algumas regras mais obscuras ou confundir uma regra com outra é muito fácil de acontecer. Mas alguns erros ocorrem porque os caminhos errados podem se parecer com uma maneira mais fácil de fazer o problema. Não a correta, mas a mais fácil – o trajeto de menor resistência. Isso normalmente acontece quando uma regra não é igual a sua tendência natural. A maioria das regras algébricas parece fazer sentido, então elas não são difíceis de lembrar. Algumas, no entanto, vão contra a maré.

Os principais erros ocorrem ao se trabalhar com operações do tipo expansivas: distribuindo ou elevando binômios ao quadrado, quebrando frações, elevando a potências. O outro grande erro está em lidar com negativos. Fique atento a essas vibrações negativas.

Termo do meio perdido

Um binômio ao quadrado tem três termos na resposta. O termo deixado de lado é o do meio: a parte obtida quando você multiplica os dois termos externos e os dois termos internos e encontra a soma deles. Em muitos casos, apenas o primeiro e o último termo são elevados ao quadrado e o do meio é simplesmente esquecido.

Certo: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Errado: $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$

Vá ao Capítulo 8 para mais informações sobre binômios ao quadrado

Distribuindo

Distribuir um número ou um sinal negativo por dois ou mais termos nos parênteses pode causar problemas se você se esquecer de distribuir o valor *por cada um dos termos* nos parênteses. Os erros aparecem quando você pára de multiplicar os termos nos parênteses antes de chegar ao final.

Certo: $x - 2(y + z - w) = x - 2y - 2z + 2w$

Errado: $x - 2(y + z - w) \neq x - 2y + z - w$

Há mais sobre distribuição no Capítulo 8

Dividindo frações

Dividir uma fração em vários pedaços menores está certo desde que cada pedaço tenha um termo do numerador (parte de cima) e do denominador (a parte de baixo). Você não pode dividir o denominador.

Certo: $\frac{x + y}{a + b} = \frac{x}{a + b} + \frac{y}{a + b}$

Errado: $\frac{x + y}{a + b} \neq \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$

Vá ao Capítulo 3 para mais informações sobre como lidar com frações

Separando radicais

Se a expressão dentro do radical tem valores que estão sendo multiplicados ou divididos juntos, então o radical pode ser dividido em radicais que multiplicam ou dividem. No entanto, você não pode separar adição ou subtração dentro do radical.

Certo: $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Errado: $\sqrt{a^2 + b^2} \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$

Para mais detalhes sobre radicais, volte ao Capítulo 4.

Ordem das operações

A ordem das operações instrui você a elevar a expressão a uma potência antes de realizar a soma ou a subtração. Um sinal negativo na frente de um termo se encontra na mesma categoria da subtração, ele deve ser feito por último.

Se você quer que o sinal negativo também seja elevado a uma potência, então coloque o sinal dentro dos parênteses com o resto do valor.

Certo: $-3^2 = -9$

Certo: $(-3)^2 = 9$

Errado: $-3^2 \neq 9$

A ordem das operações é aprofundada no Capítulo 5.

Expoentes Fracionários

Um expoente fracionário tem uma potência na parte de cima da fração e o radical na parte de baixo. Lembre-se que ao escrever $\sqrt{x}$ como um termo com um expoente fracionário, $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Um expoente fracionário indica que há uma raiz envolvida no problema. O número dois no expoente fracionário fica na parte de baixo – o radical é sempre o número de baixo.

Certo: $\sqrt[5]{x^3} = x^{3/5}$

Errado: $\sqrt[5]{x^3} \neq x^{5/3}$

Dê uma olhada no Capítulo 4 para mais informações sobre expoentes fracionários.

Multiplicando as bases

Ao multiplicar números com expoentes e a mesma base, você soma os *expoentes* e deixa a base como está. As bases nunca são multiplicadas.

Certo: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$

Errado: $2^3 \cdot 2^4 \neq 4^7$

Dê uma olhada no Capítulo 4 para mais informações sobre multiplicação de números com expoentes e a mesma base.

Uma potência a uma potência

Para elevar um valor que tem uma potência a outra potência, multiplique os expoentes para elevar todo o termo à outra potência. Não eleve somente o expoente a uma potência – é a base que está sendo elevada, e não o expoente.

Certo: $(x^2)^4 = x^8$

Errado: $(x^2)^4 \neq x^{16}$

O Capítulo 4 é o lugar para procurar mais informações sobre potências.

Reduzindo

Ao reduzir frações com um numerador que tem mais de um termo separado pela adição ou subtração, o valor que você usar para reduzir a fração tem que dividir *cada um dos termos,* do numerador e do denominador, de maneira exata.

Certo: $\frac{(4+6x)}{4} = \frac{(2+3x)}{2}$

Errado: $\frac{(4+6x)}{4} \neq \frac{(2+6x)}{2}$

Vá para o Capítulo 3 se você quer saber mais sobre frações.

Expoentes negativos

Ao transformar frações em expressões com expoentes negativos, dê para cada um dos fatores no denominador um expoente negativo.

Certo: $\frac{1}{2ab^2} = 2^{-1}a^{-1}b^{-2}$

Errado: $\frac{1}{2ab^2} \neq 2a^{-1}b^{-2}$

Há mais sobre expoentes negativos no Capítulo 4.

Capítulo 21

As dez maneiras de fatorar um polinômio

Neste capítulo:

- Fatorando dois termos
- Tentando três termos
- Transformando expressões em equações quadráticas
- Encarando quatro ou mais termos

Os polinômios podem ser fatorados de diversas maneiras, dependendo do número de termos e da forma como eles são montados. Mas em geral é mais fácil se você tiver uma lista para consultar enquanto faz a fatoração. Se um polinômio tem dois termos (o que significa que é um binômio), há somente quatro possibilidades para fatoração. Se nenhum desses métodos funcionar, então a expressão não pode ser fatorada. As técnicas encontradas nesse capítulo são as mais comumente usadas e provavelmente podem ajudar a resolver a maioria das situações de fatoração.

Dois termos com o MDC

Em uma expressão com dois termos, procure por *algo* (pode ser mais de um) que cada termo tenha em comum. Então fatore o máximo divisor comum de cada termo e escreva o resultado como o produto do MDC e da divisão. Assim:

$$ab + ac = a(b + c)$$

A diferença de dois quadrados

Quando uma expressão é composta de dois termos que são quadrados perfeitos separados pela subtração, então a fatoração resulta na soma e na subtração das raízes quadradas dos termos:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

A diferença de dois cubos

Quando você está lidando com cubos perfeitos separados pela subtração, você pode fatorar os dois termos no produto de um binômio e um trinômio como o modelo padrão:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

A soma de dois cubos

Expressões formadas por dois termos que são cubos perfeitos separados pela adição são fatoradas no produto de um binômio por um trinômio, seguindo esse padrão:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Três termos com o MDC

Quando você encontrar três termos em uma expressão, procure por algo (podendo ser mais de uma coisa) que cada termo tem em comum entre eles. Você pode, então, fatorar o máximo divisor comum de cada termo e escrever o resultado como o produto do MDC e das formas fatoradas.

$$ab + ac + ad = a(b + c + d)$$

Três termos com a fatoração por soma e produto (desfazendo o PEIU)

Quando três termos em uma expressão quadrática estão na forma $ax^2 + bx + c$, procure uma maneira de fatorar os termos no produto de dois binômios usando a fatoração por soma e produto (dê uma olhada nos capítulos 10 e 14 para uma reciclagem sobre fatoração por soma e produto – desfazendo o PEIU).

$$ax^2 + bx + c = (dx + e)(fx + g)$$

O x é a variável. O a, b e c são números reais com exceção do zero. O d, e, f, g representam números reais na fatoração. O $a = d \cdot f$ e o $c = e \cdot g$.

Transformando em equações quadráticas

Uma expressão com três termos na forma $ax^{2n} + bx^n + c$ significa que você escreve primeiro a expressão como uma equação quadrática compatível (de segundo grau) do tipo $ax^2 + bx + c$, e depois procura uma maneira de fatorar no produto de dois binômios usando a fatoração por soma e produto (desfazendo o PEIU).

O *a, b, c* são todos números reais e diferentes de zero. O *n* é um número contável, 1,2,3, e assim sucessivamente, então o primeiro expoente é sempre um número contável que é duas vezes o segundo expoente. Vá para os Capítulos 11 e 14 para saber mais sobre esse método.

Quatro ou mais termos com o MDC

Quando você encontra expressões com quatro ou mais termos, procurar pelo máximo divisor comum (ou comuns) é a primeira coisa a se fazer. Se você encontra o MDC, fatore cada termo e escreva o resultado como o produto do MDC e dos termos fatorados, como:

$$ab + ac + ad + ae = a(b + c + d + e)$$

Quatro ou mais termos com um símbolo de agrupamento

Quando você se depara com expressões com quatro, seis, oito ou um número par de termos, tente agrupar os termos em grupos de tamanhos iguais, cada um com o seu máximo divisor comum. Depois procure o MDC nos termos novos formados. Por exemplo:

$$ax + ay + bx + by + cx + cy =$$
$$a(x + y) + b(x + y) + c(x + y) =$$
$$(x + y)(a + b + c)$$

Dê uma olhada no Capítulo 11 para mais detalhes sobre agrupamento.

Quatro ou mais termos com agrupamento desigual

Quando há quatro ou mais termos em uma expressão e não há nenhuma maneira de colocá-los em agrupamentos iguais que tenham MDC, então procure agrupamentos desiguais que possam ser fatorados em quadrados ou cubos perfeitos.

Tente fatorar os grupos novos usando as regras para fatorar a diferença de quadrados ou a diferença da soma de cubos. Isso pode ser encontrado no começo desse capítulo e no Capítulo 11.

$$x^2 - a^2 + 2ab - b^2 = x^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = x^2 - (a - b)^2 =$$

$$[x - (a - b)][x + (a - b)]$$

Capítulo 22

Dez regras de divisibilidade

Neste capítulo:

Sabendo quando o número pode ser dividido sem deixar resto

Adivinhando as regras de divisibilidade

Regras de divisibilidade são atalhos para ver se um número pode ser dividido por outro sem deixar resto. Isso é muito útil quando você está reduzindo frações ou determinando se todos em um grupo vão receber as mesmas quantidades de pedaços de um doce. Um número que é divido sem deixar resto por todos os números com regras nesse capítulo é 3.960. De fato, é o menor número divisível por todos eles.



Quando eu uso a palavra divisível eu quero dizer divisível de *maneira exata,* sem resto.

Divisibilidade por 2

Um número é divisível por 2 se o último algarismo no número é 0, 2, 4, 6, ou 8:

- 1.234 é divisível por 2 porque ele termina em 4.
- 2.345 não é divisível por 2 porque termina em 5.
- 3.960 é divisível por 2 porque termina em 0.

Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos é um número divisível por 3:

- 1.234 não é divisível por 3 porque 1 + 2 + 3 + 4 = 10.
- 3.345 é divisível por 3 porque a soma dos algarismos no número é igual a 15.
- 120.000.000.000.000 é divisível por 3 porque a soma dos algarismos é 3.
- 3.960 é divisível por 3 porque a soma dos algarismos é 18.

Divisibilidade por 4

Um número é divisível por 4 se os dois últimos algarismos no número formam um número divisível por 4:

- 1.234 não é divisível por 4 porque 34 não é divisível por 4.
- 121.212 é divisível por 4 porque 12 é divisível por 4.
- 444.444.444.444.414 não é divisível por 4 porque 14 não é divisível por 4.
- 3.960 é divisível por 4 porque 60 é divisível por 4.

Divisibilidade por 5

Um número é divisível por 5 se o último algarismo for 0 ou 5:

- 12.345 é divisível por 5 porque o último algarismo é 5.
- 555.552 não é divisível por 5 porque o último algarismo é 2.
- 342.000.460 é divisível por 5 porque o último algarismo é 0.
- 3.960 é divisível por 5 porque o último algarismo é 0.

Divisibilidade por 6

Um número é divisível por 6 se é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo. Isso significa que tem que terminar em 0, 2, 4, 6, ou 8 e a soma dos algarismos têm que ser divisíveis por 3:

- 3.000.000 é divisível por 6 porque termina em 0 e a soma dos algarismos é 3.
- 111.111.102 é divisível por 6 porque termina em 2 e a soma dos algarismos é 9.
- 666.666.010 não é divisível por 6 porque a soma dos algarismos é 37.
- 3.960 é divisível por 6 porque termina em 0 e a soma dos algarismos é 18.

Divisibilidade por 8

Um número é divisível por 8 se os últimos três algarismos formam um número divisível por 8:

- 5.005.808 é divisível por 8 porque 808 é divisível por 8.
- 888.888.111 não é divisível por 8 porque 111 não é divisível por 8.
- 3.960 é divisível por 8 porque 960 é divisível por 8.

Divisibilidade por 9

Um número é divisível por 9 se a soma dos algarismos do número é divisível por 9:

- 123.111 é divisível por 9 porque a soma dos algarismos é 9.
- 111.111 não é divisível por 9 porque a soma dos algarismos é 6.
- 108.000 é divisível por 9 porque a soma dos algarismos é 9.
- 3.960 é divisível por 9 porque a soma dos algarismos é 18.

Divisibilidade por 10

Um número é divisível por 10 se termina em 0:

- 111.110 é divisível por 10.
- 100.000.003 não é divisível por 10.
- 3.960 é divisível por 10 porque termina em 0

Divisibilidade por 11

Um número é divisível por 11 se as somas de seus algarismos alternados e a posterior subtração desse resultado for igual a 0, 11, 22, 33 ou qualquer dos algarismos múltiplos de 11. Em outras palavras, se você tem um número com seis algarismos: some o primeiro, terceiro e quinto algarismos, depois some o segundo, quarto e sexto algarismos. Então subtraia esses resultados, e se a resposta é um múltiplo de 11, o número original é divisível por 11. Eu não estou dizendo que essa é uma dica que você vá usar todo dia, eu só estou dizendo que funciona.

- 146.322 é divisível por 11 porque os algarismos alternados 1,6,2 somam 9 e os algarismos alternados 4,3,2 somam 9.A diferença entre 9 e 9 é 0.
- 818.290 é divisível por 11 porque os algarismos alternados somam 25 e 3,e a diferença entre as duas somas é 22.
- 3.960 é divisível por 11 porque os algarismos alternados somam 9 em ambos os casos,então a diferença é 0.

Divisibilidade por 12

Um número é divisível por 12 se os dois últimos algarismos formam um número divisível por 4 e a soma dos algarismos é divisível por 3:

- 333.216 é divisível por 12 porque 16 é divisível por 4 e a soma dos algarismos é 18,que é divisível por 3.
- 2.000.010.000 é divisível por 12 porque 00 é divisível por 4 e a soma dos algarismos é 3.
- 3.960 é divisível por 12 porque 60 é divisível por 4 e a soma dos algarismos é 18.

Capítulo 23

Dez dicas para lidar com problemas

Neste capítulo:

- Encontrando a fórmula correta
- Encontrando a variável que ajuda
- Resolvendo a incógnita e verificando respostas
- Contando a história através de números e operações

Cada problema é único. Assim como as minhas impressões digitais são diferentes das suas, também os problemas são diferentes uns dos outros. Mas ainda que únicas as impressões digitais e os problemas, eles compartilham semelhanças e padrões. Tirar o máximo de proveito dessas semelhanças e padrões é garantia de sucesso ao lidar com essas questões. A lista de sugestões para lidar com problemas vai ajudar você a descobrir essas semelhanças. Use quantas dicas precisar para resolver as dificuldades com as quais eventualmente se deparar.

Desenhando uma figura

Muitas pessoas reagem bem a lembretes visuais. Desenhe uma figura (nada sofisticado) para representar o que está acontecendo no problema. Rotule a sua figura com números ou nomes ou outro tipo de informação que ajude você a entender a situação. Crie mais ou mude o desenho à medida que você monta a equação para o problema.

Faça uma lista

Tente algumas respostas. Se o problema pergunta quantas das 100 pessoas eram crianças, faça uma lista tentando algumas combinações: 90 + 10, 80 + 20, e assim sucessivamente. Você algumas vezes pode tropeçar na solução através da sua lista e, então, você pode trabalhar de trás pra frente para criar uma maneira sistemática de resolver a equação. Mesmo se você não encontrar a resposta dessa maneira, ela ainda vai te dar a noção de qual poderia ser a resposta correta. É como fazer um reconhecimento de campo.

Atribuindo variáveis para representar números

Deixe que variáveis (letras) representem números. Uma variável pode representar o comprimento de um barco ou o número de pessoas, mas não pode representar o barco ou a pessoa. Você pode escolher as letras de modo que elas ajudem o problema a fazer sentido. Por exemplo, você pode deixar que k represente apenas a altura de Ken, k não pode representar Ken.

Traduzindo conjunções e verbos

Você pode usar dicas do problema para ajudar você a montar uma equação traduzindo palavras em símbolos matemáticos. Geralmente você pode fazer com que um sinal de mais substitua palavras como *e* ou *aumentado* por e um sinal de menos substitua *menor que* ou *tirado*. Use $2x$ para *duas vezes* e o sinal de igual para *são, tem, é,* e outros verbos.

Em muitos casos você pode escrever a equação na mesma ordem que as dicas no problema. Por exemplo:

> Stephan tem seis livros a mais que duas vezes o número de livros de Alicia.

Você pode escrever isso como $s = 6 + 2a$ se você deixa que o s represente o número de livros de Stephan tem e a represente o número de livros que Alicia tem. Veja o Capítulo 18 para saber mais sobre palavras e como elas são traduzidas para a álgebra.

Olhe para a última sentença

Olhe para a última sentença do problema ela geralmente diz a você o que a variável deve representar. A última sentença talvez o deixe saber se você deve usar uma fórmula tradicional para a área, distância, juros ou volume. Por exemplo:

> Marilee e Scott participaram de uma corrida. Marilee terminou dois minutos antes de Scott, mas ela correu um quilômetro a menos do que Scott. Se eles correram na mesma velocidade e a distância total que eles correram (somadas juntas) foi de nove quilômetros, então quanto tempo eles levaram para correr essa distância?

Apenas olhe para todas as palavras. Vá para a última sentença – e até para a última frase da última sentença. Ela diz a você que você está procurando pelo tempo que eles levaram. A fórmula que a última sentença sugere é $d = vt$ (distância é igual à velocidade vezes o tempo).

Encontrando uma fórmula

Quando possível, use uma fórmula como sua equação ou como parte da sua equação. As fórmulas são um bom lugar para começar a montar as relações. Mantenha as fórmulas padrão em um lugar onde você possa usá-las para rápida referência (Para isso você pode usar a prática folha de consulta destacável na parte da frente deste livro). Esteja familiarizado com o que as variáveis das fórmulas representam.

Simplificando através da substituição

Procure por variáveis relacionadas à outra variável e tente expressar uma dessas variáveis em função da outra. Por exemplo, se um lado do triângulo é duas vezes maior do que o outro, você pode expressar esses dois lados como x e $2x$ ao invés de x e y.

Resolvendo uma equação

Traduza a história em uma equação que represente a situação e as relações expressas no problema. Resolva a equação com cuidado, usando as regras algébricas.

Verifique se faz sentido

Quando você obtiver uma reposta, decida se ela faz sentido dentro do contexto do problema. Se você está tentando descobrir a altura de um homem e sua resposta foi 40 metros, você provavelmente cometeu um erro em algum lugar. Ter uma resposta que faça sentido não garante que seja uma reposta correta, mas é a primeira verificação para dizer se a resposta *não está* correta.

Verificando a exatidão

Se você quer determinar se sua reposta faz realmente sentido, examine a álgebra. Faça isso colocando a solução de volta na equação original e verificando. Se funcionar, então coloque sua resposta no problema para ver se funciona com todas as situações e relações.

Glossário

Algarismos: numerais de zero até nove,assim caracterizados porque eram, originalmente, contados nos dedos das mãos. Por isso, também chamados de dígitos.

Ângulo reto: ângulo de 90 graus.

Área: medida de uma região específica de um plano.

Arredondamento: valor aproximado ao próximo dígito ou casa decimal, como por exemplo, arredondar 14,9 para 15.

Base: valor multiplicado repetidamente em uma expressão exponencial.

Binômio: dois termos separados por adição ou subtração.

Circunferência: é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizados a uma mesma distância r de um ponto fixo denominado centro da circunferência.

Coeficiente da reta: coeficiente que multiplica a variável de primeiro grau e indica a inclinação da reta; se é mais inclinada ou menos e, também, se sobe ou desce.

Coeficiente: número multiplicado por uma variável.

Combinação: método de contagem que diz a você de quantas maneiras um determinado número de objetos pode ser selecionado num dado conjunto.

Constante: variável ou número que nunca muda de valor em uma expressão.

Coordenada: parte de um par ordenado que designa a posição de um ponto em um plano cartesiano.

Cúbica: adjetivo usado para descrever uma expressão na qual a maior potência é três.

Cubo: **1.** terceira potência de um número. Resultado da multiplicação de um número por ele mesmo três vezes.
2. um sólido tridimensional com seis faces ao quadrado.

Decimal: **1.** fração com um denominador de 10 não escrito indicado pelo ponto decimal.
2. adjetivo que descreve o sistema numérico organizado em quantidades diferenciais de dez.

Denominador comum: denominadores (parte de baixo) iguais em mais de uma fração.

Denominador: número de baixo de uma fração.

Diâmetro: maior distância através de um círculo

Diferença: resultado da subtração.

Divisão sintética: atalho do processo da divisão no qual somente os coeficientes dos termos em uma expressão são usados. A resposta é obtida multiplicando e somando.

Divisível: um número que pode ser dividido por outro sem resto.

Equação: afirmação matemática com um sinal de igual mostrando que dois valores são iguais.

Expoente: também chamado de *potência*. É um valor escrito em uma letra menor, posicionado acima e à direita da base e que indica o número de vezes que a base é multiplicada por ela mesma.

Expressão: combinação de valores (variáveis, números, e/ou constantes) e operações.

Fator: um dos valores em uma multiplicação.

Fatoração em números primos: processo para encontrar os números primos que, quando multiplicados, produzem um dado número composto.

Fatorar: reescrever uma expressão algébrica como um produto.

Fatorial: operação que multiplica um número inteiro por todo número natural menor do que ele.

Fórmula: regra ou método que é aceito como verdadeiro e usado repetidamente em aplicações simples.

Fração irredutível: estado de uma fração cujo numerador e denominador não podem ser divididos de maneira exata pelo mesmo número. Uma fração com 12 como numerador e 25 como denominador é irredutível.

Fração própria: fração cujo valor é menor do que um. O numerador é sempre menor do que o denominador.

Fração: quantidade expressa na forma de um numerador (valor acima da barra) e um denominador (valor abaixo da barra que determina o que se precisa para formar um).

Frações equivalentes: frações iguais uma a outra, mesmo que elas talvez tenham denominadores diferentes.

Gráfico: figura desenhada em um plano.

Grau de um ângulo: número de graus entre 0 e 360 que determinam a medida de um ângulo.

Grau de uma expressão: maior potência que aparece em uma expressão.

Hipotenusa: maior lado de um triângulo retângulo.

Inequação: relação entre dois valores desiguais.

Infinito: sem fim; incontável.

Interseção: ponto onde o gráfico cruza o eixo x, ou o eixo y, ou outra reta dada.

Inverso aditivo: número com a mesma parte numérica, mas com sinal oposto (mais ou menos) ao do número dado. Se zero é a soma de dois números, então esses dois números são *inversos aditivos* um do outro.

Inverso multiplicativo: também conhecido como recíproco, ou apenas inverso. Um dentre dois números cujo produto é um. O recíproco de um número é esse número em particular no denominador de uma fração como o número um no numerador.

Linear: adjetivo que descreve uma expressão ou equação na qual a maior potência de qualquer variável é igual a um. As constantes podem ser potências maiores. Por exemplo, $x + y = 4$ é linear.

Linhas paralelas: linhas que nunca se cruzam e estão sempre a mesma distância uma da outra.

Linha: todos os pontos em um plano cartesiano que satisfazem a uma equação linear.

Linhas perpendiculares: linhas que formam um ângulo de 90graus na sua interseção.

Máximo divisor comum (MDC): maior valor possível que divide, sem deixar resto, cada termo de uma expressão contendo dois ou mais termos.

Monômio: uma expressão com apenas um termo.

Múltiplo: um número dividido de maneira exata por um fator específico. Por exemplo, os números 14 e 21 são múltiplos de 7.

Notação científica: uma maneira padrão de escrever números muito grandes ou muito pequenos como o produto de dois valores – um número entre um e dez e uma potência de dez.

Numerador: o número de cima em uma fração.

Número composto: número inteiro maior que um e que não é primo.

Número inteiro: um número positivo ou negativo, ou zero; números começando com o zero e subindo ou descendo com acréscimo de um.

Número irracional: número sem uma fração equivalente cujo decimal nunca se repete ou termina.

Número misto: fração imprópria escrita como um número inteiro seguido de uma fração.

Número negativo: qualquer quantidade que seja menor que zero; geralmente precedido de um sinal de menos.

Número positivo: qualquer quantidade maior que zero.

Número primo: número natural maior que o número um e que pode ser dividido de maneira exata somente por ele mesmo ou um.

Número racional: quantidade positiva ou negativa que pode ser escrita na forma de fração; seu decimal equivalente termina ou se repete.

Números naturais: todos os números inteiros não negativos. Comece com o zero e some um repetidamente para encontrar o conjunto dos números naturais.

Operação binária: processo que requer dois valores para produzir um terceiro valor.

Operação: processo matemático, como a adição, subtração, multiplicação, e divisão, executado em uma ou mais quantidades.

Oposto: 1. o oposto de uma *operação* é outra operação que te leva de volta pra onde começou.
2. o oposto de um *número* é o inverso aditivo – o mesmo valor absoluto de um número com um sinal diferente.

Origem: ponto de interseção do eixo x e do eixo y em um plano cartesiano.

Par ordenado: dois valores dentro dos parênteses e separados por uma vírgula que indica a posição de um ponto em um plano cartesiano.

Perímetro: distância total ao redor da parte de fora de uma região ou área.

Permutação: método de contagem que determina o número de arranjos ordenados possíveis de existir quando certo número de objetos é selecionado de um dado conjunto.

Pi (p): letra do alfabeto grego que se refere à relação entre o diâmetro e a circunferência de um circulo. É aproximadamente 3.14 ou $^{22}/_{7}$.

Plano cartesiano: esquema reticulado determinado pela interseção de duas linhas numeradas e perpendiculares, chamadas de eixos.

Polinômio: expressão com um ou mais termos.

Porcentagem: frações com um denominador igual a 100. A porcentagem é o numerador da fração – quantas partes de 100.

Potência: valor de um expoente que indica o número de vezes que a base é multiplicada por ela mesma.

Primos entre si: dois números que não têm fatores em comum a não ser o número um.

Produto: resultado da multiplicação.

Proporção: equação que mostra que duas razões são iguais uma a outra, como um está para dois assim como três está para seis $\left(1:2 = 3:6 \text{ or } \frac{1}{2} = \frac{3}{6}\right)$.

Propriedade Associativa: característica da adição e da multiplicação que permite a mudança de termos no agrupamento sem afetar o resultado.

Propriedade comutativa: característica da adição e da multiplicação que permite que a ordem dos valores em uma operação possa ser mudada sem afetar o resultado.

Propriedade distributiva: característica da multiplicação e da adição que permite a multiplicação de cada termo individual em uma série agrupada por um termo de fora do agrupamento sem mudar o valor da expressão.

Propriedade do Produto Nulo (PPN): regra que diz que se o produto de dois números é zero, então um dos números deve ser zero.

Quadrado: 1. figura de quatro lados em um plano. Todos os lados de um quadrado são do mesmo tamanho e se encontram em ângulos retos.
2. valor relacionado ao expoente de número dois.
3. (Quadrado perfeito) produto de outro número vezes ele mesmo.

Quadrante: Uma das quatro regiões em um plano de coordenadas definida pelo eixo x e pelo eixo y.

Quadrática: Também conhecida como segundo grau é a expressão ou equação na qual a maior potência é dois, ou seja, o grau é dois.

Quociente: resultado da divisão.

Radical (√): símbolo para achar a raiz quadrada.

Raio: distância do centro do círculo até sua borda mais externa; é a metade do seu diâmetro.

Raiz cúbica: número que se elevado ao cubo ou a terceira potência, reproduz o número dado. Por exemplo, a raiz cúbica de oito é dois porque dois elevado ao cubo é igual a oito.

Raiz dupla: solução que aparece duas vezes ao resolver uma equação porque o referente fator aparece duas vezes na forma fatorada. Por exemplo, em $(y-2)(y-2)=0$, $y=2$ é uma raiz ou solução dupla.
Em $(y-2)(y-2)(x+3)=0$, $y=2$ ainda é uma raiz ou solução dupla.

Raiz quadrada principal: número positivo que quando multiplicado por ele mesmo resulta em um dado número positivo. Por exemplo, as raízes quadradas de 25 são 5 e -5, mas a raiz quadrada *principal* de 25 é somente 5.

Raiz quadrada: valor que resulta em um dado valor quando multiplicado por ele mesmo. Por exemplo, a raiz quadrada de quatro é dois porque dois vezes dois é igual a quatro, que é um quadrado perfeito.

Raiz: valor que multiplicado por ele mesmo um número de vezes resulta no valor ou número procurado, como por exemplo, dois é a raiz de quatro porque dois multiplicado por ele mesmo resulta em quatro.

Recíproco: inverso multiplicativo de um dado número. O produto de um dado número e o seu recíproco é sempre um.

Recíprocos negativos: dois números, um positivo e um negativo, cujo produto é menos um.

Reduzir: processo no qual os fatores comuns no numerador e no denominador de uma fração são cortados, deixando uma fração equivalente.

Resolver: encontrar a resposta para uma questão, ou o número que uma variável representa.

Resto: valor que sobra quando um número é dividido por outro.

Retângulo: figura plana de quatro lados com todos os ângulos retos; seus lados opostos são iguais em tamanho.

Semiperímetro: metade do perímetro.

Simetria: característica de equações que permite a troca de valores de um lado do sinal de igual com os valores do outro lado do sinal de igual (quantidades da direita vão para a esquerda; quantidades da esquerda vão para a direita) sem mudar a veracidade da equação: Se $x = y$, então $y = x$.

Simplificar: combinar tudo que pode ser combinado e colocar uma expressão na sua forma mais fácil de entender.

Sinal de agrupamento: parênteses, colchetes e chaves. Esses sinais podem afetar a ordem das operações, pois os termos e operações dentro do sinal de agrupamento devem sempre ter prioridade na resolução da questão.

Sinal: símbolo que indica se um valor é positivo (+) ou negativo (-).

Solução da equação: valor(es) de uma variável que torna(m) a equação uma afirmação verdadeira.

Soma: resultado da adição.

Substituição: método de substituir um valor por seu equivalente.

Teorema de Pitágoras: fórmula específica dos triângulos retângulos que diz que o quadrado da hipotenusa (c) é igual à soma dos quadrados dos catetos (a e b): $a^2 + b^2 = c^2$.

Termo: constantes, números e/ou variáveis conectadas umas as outras através da multiplicação ou da divisão.

Trinômio: expressão com três termos onde cada termo é separado dos outros através da adição ou subtração.

Valor absoluto: : uma operação que diz a você a distância de um número até o zero.

Valor: uma equivalência numérica ou merecedor de uma expressão ou variável.

Variável: letra que representa um número desconhecido ou o valor que você está tentando resolver em um problema algébrico.

Vértice: vértice de uma figura é onde dois lados se cruzam para formar um ângulo.

Volume: medida da quantidade de espaço dentro de uma figura sólida tridimensional.

Índice Remissivo

• *Números e símbolos* •

• *A* •

• B •

• C •

• D •

• E •

• F •

• H •

• I •

• L •

• M •

• N •

• O •

• P •

• Q •

• R •

• S •

• W •

• X •

• Y •

• Z •